Die metrischen Eigenschaften von Kollineationen in mehrdimensionalen Euklidischen Räumen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

vorgelegt von

Karl Kramer

aus Rottweil a. N.

Druck von Frommhold & Wendler, Leipzig

D. R. G. M.

1938

Von der Fakultät angenommen den 13. Februar 1936

Referent: Prof. Dr. K. Kommerell
Dekan: Prof. Dr. Lehmann

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meiner lieben Mutter

L e b e n s l a u f .

Am 6. Dezember 1909 wurde ich, Karl Nikolaus Kramer, als Sohn des Friseurmeisters Otto Kramer und seiner Ehefrau Maria Rosa, geb. Banholzer, in Rottweil a.N. geboren. Von 1916 bis 1918 besuchte ich die Volksschule und dann das humanistische Gymnasium meiner Heimatstadt, das ich im Frühjahr 1928 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Ich studierte Mathematik und Physik an den Universitäten in Tübingen, München und Göttingen und als Hörer der Technischen Hochschule in Stuttgart. Im Frühjahr 1934 legte ich die erste und 1935 die zweite Dienstprüfung für das höhere Lehramt in Württemberg ab. Anschließend fand ich im höheren Schuldienst in Württemberg als Stellvertreter und Amtsverweser Verwendung, die durch eine viermonatige praktische Tätigkeit bei der Versicherungs-Aktiengesellschaft "Allianz und Stuttgarter Verein" unterbrochen war. Seit April 1937 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof.

Allen meinen Lehrern an der Schule und Hochschule danke ich an dieser Stelle herzlich. Aufrichtig dankbar bin ich Herrn Prof. Dr. Karl Kommerell für das Interesse und die Anregungen, die er dieser Arbeit zuteil werden ließ.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	1
I. Teil: Projektive Geometrie der Kollineationen..	3
§ 1. Der projektive n-dimensionale Raum	3
§ 2. Definition und Erzeugung der Kollineation..	5
§ 3. Doppelelemente der Kollineation	7
§ 4. Das Rechnen mit Verwandtschaften	10
II.Teil: Metrische Geometrie der Kollineationen...	12
§ 5. Der Euklidische Raum und seine Fundamentalkollineationen	12
§ 6. Analytische Reduktionsmethode für die Affinitäten	21
§ 7. Analytische Reduktionsmethode für die nichtaffinen Kollineationen	29
§ 8. Fokaleigenschaften affiner Räume	37
§ 9. Fokaleigenschaften der nichtaffinen Kollineation	49

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549601_0082

Einleitung.

Durch Verallgemeinerung von bekannten Spezialfällen ausgehend, hat A. F. Möbius [1] die Kollineation definiert. Gemäß ihrer grundlegenden Bedeutung für die projektive Geometrie wurde sie von jeher fast ausschließlich nach projektiven Gesichtspunkten und mit projektiven Mitteln untersucht. Das Hauptproblem der Kollineation war die Bestimmung der sich selbst entsprechenden Elemente; ihm ist schon eine sehr umfangreiche Literatur gewidmet worden. Auch parallel zur Entstehung der Geometrie des Raumes von beliebig vielen Dimensionen, die besonders in Italien sich lebhaft entwickelte, wurde dieses Problem für den n-dimensionalen Raum in Angriff genommen, allen voran von C. Segre [2], sodaß die projektive Geometrie der Kollineationen heute so gut wie abgeschlossen ist.

Jedoch die Kenntnis der Doppelelemente einer Kollineation macht uns dieselbe noch nicht recht anschaulich. Weil wir den Nachdruck auf die Eigenschaft der Kollineation, Abbildung zu sein, legen, interessieren uns besonders die Verzerrungsverhältnisse und die Fragen, wie die innere Verformung des Raumes vor sich geht, welche Figuren erhalten bleiben. Weniger berührt uns die gegenseitige Lage der Räume. Wir sind geneigt, zwei Kollineationen als gleich anzusehen, die sich nur dadurch unterscheiden, daß der eine der beiden Räume kongruent mit sich bewegt wurde. Dies tun wir ja auch in den Anwendungen der Lehre von den Kollineationen, bei der Herstellung und Betrachtung eines Modells, Reliefs oder Gemäldes, die wir unabhängig von ihrer augenblicklichen Lage zum Original beurteilen.

Für den dreidimensionalen Raum wurden solche metrischen Eigenschaften der Kollineation zuerst von H. J. St. Smith [3] und

---

1) A. F. Möbius: "Der baryzentrische Calcul", Leipzig (1827)
2) C. Segre: "Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni", Reale Accad.dei Lincei, Ser. 3a, Bd. 19 (1884). – Vgl. C. Segre, Enzykl.d.math.Wiss. III C 7, S.769-972.
3) H. J. St. Smith: "On the focal properties of homographic figures", Proc.of London Math.Soc., Bd.2 (1869), S.196 f. oder Collected Math.Papers, Oxford, Bd.1 (1894), S.545-602.

im Anschluß an ihn besonders von T h. R e y e [4] gegeben, hauptsächlich in synthetischer Form.

Als erster hat K. K o m m e r e l l [5], mein verehrter Lehrer, dieses neue Problem definiert, den Zusammenhang mit den metrischen Eigenschaften der Flächen 2.O. erkannt und ihn zur analytischen Darstellung und Lösung benützt.

Auf seine Anregung hin beschäftigte sich auch R. D ü r r [6] mit den Deformationseigenschaften der nichtaffinen Kollineationen.

Diese Arbeiten sind nicht nur in wissenschaftlicher, sondern auch in pädagogischer Hinsicht wertvoll. Wir kennen ja die Bestrebungen, auch in der Schule den Begriff der Abbildung offen hervortreten zu lassen und methodisch zu benützen. Von den projektiven Eigenschaften der Abbildungen aber wird man in der Schule wohl kaum ausgehen wollen.

Solche metrischen Untersuchungen wollen wir auf den n-dimensionalen Raum erweitern. Aber, - wird der Leser fragen - wenn doch auf der einen Seite Wert auf Anschaulichkeit gelegt wird, warum dann auf der andern Seite mehrdimensionale Räume, die doch unserer Anschauung fremd sind. Diesem, an sich berechtigten Einwurf können wir zwei Punkte entgegenhalten: Erstens hat schon jeder Versuch, sich Gebilde oder Verhältnisse im n-dimensionalen Raume nur irgendwie vorzustellen, ein tieferes Einleben auch in das Wesen der Ebene und unseres Raumes und der Analogien zwischen ihnen zur Voraussetzung und im Gefolge. Zweitens werfen auch die Ergebnisse der n-dimensionalen Forschungen ein Licht in die Hintergründe uns längst bekannter Sätze des dreidimensionalen Raumes. Sowohl der Umstand, daß ein grundlegender Unterschied zwischen Räumen gerader und ungerader Dimension besteht, drückt dem Raum von drei Dimensionen den Stempel des Speziellen auf, als

---

4) T h. R e y e : "Über die fokalen Eigenschaften kollinearer Gebilde", Math. Ann. 46 (1895), S. 423-441. - Th. R e y e: "Geometrie der Lage, Vorträge"; 1. Abteilung, in der 5. Auflage (1909), fernerhin zitiert unter "R I"; 2.Abteilung, in der 4. Auflage (1907), fernerhin zitiert unter "R II"; 3.Abteilung, in der 4.Aufl.(1910),ferner zitiert unter "R III". - Das Wichtigste der zuerst genannten Arbeit von Reye ist wiedergegeben in R II, S.253 ff. und S.327 ff.

5) K. K o m m e r e l l : "Über nichtaffine Raumkollineationen", Jahresbericht d.Deutsch.Math.Vergg. XXIX (1920), S.1-27; künftig zitiert unter "K I". - K. K o m m e r e l l : "Affine Raumtransformationen und Affinoren", Jahresbericht d.Deutsch. Math.Vergg.XXX (1921),S.35-55; künftig zitiert unter "K II". - Der Inhalt der beiden Arbeiten ist wiedergegeben in seinem Lehrbuch : " S a l m o n - F i e d l e r - K o m m e r e l l, Analytische Geometrie des Raumes" 1.Teil,5.Auflage (1922/1923); künftig zitiert unter "SFK".

6) R. D ü r r: "Deformations- und Brennpunktseigenschaften kollinealer nichtaffiner Felder und Räume", Tübinger Inaug.-Diss., München (1927).

auch die Beschränkung der Zahl der Dimensionen, die es z.B. mit sich bringt, daß in ihm schon die Gerade sich selbst dual ist.

Um auch dem Leser, der in der Terminologie des n-dimensionalen Raumes nicht bewandert ist, ohne lange Durcharbeit größerer Werke das Verständnis zu ermöglichen, ist in einem vorbereitenden I. Teil gerade das Notwendigste aus der projektiven Geometrie zusammengestellt, ohne Anspruch auf Vollständigkeit. Dadurch wird zugleich die Voraussetzung geschaffen, um im II. Teil die metrische Theorie der Kollineationen - unabhängig von den Hyperflächen 2.O. - aus der projektiven Geometrie aufbauen zu können im Sinne des Erlanger Programms.

I. Teil.

Projektive Geometrie der Kollineationen.

§ 1. Der projektive n-dimensionale Raum.[7]

1.

Wir postulieren die Existenz eines n-dimensionalen Raumes R_n, der ∞^n reelle Punkte besitzt. Später werden wir sogar zwei oder mehrere solcher Räume betrachten. Analytisch wird der R_n durch die Gesamtheit aller Verhältnisse von $(n+1)$ reellen (endlichen) Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$, die nicht alle zugleich Null sein dürfen, dargestellt. Jeder "Punkt" P des R_n ist durch diese $(n+1)$ Zahlen, seine "homogenen Koordinaten", bestimmt. Zwei Punkte sind dann und nur dann identisch, wenn ihre Koordinaten proportional sind. Synthetisch kommt man zum R_n auf induktivem Weg durch Projektion der Punkte eines k-dimensionalen Raumes aus einem neuen, unabhängigen Punkt.

Ein "Raum", genauer "l i n e a r e r R a u m", Unterraum von R_n, heißt jede Gesamtheit von Punkten, deren Koordinaten linearen Gleichungen genügen, und zwar sei er ein Raum der Dimension k,

---

7) Vgl. Enzyklopädieartikel von C. S e g r e, a.a.O. 2), dem fast alle Bezeichnungen entnommen sind. - E. B e r t i n i : "Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume", Deutsch von Duschek, Wien (1924). - P. H. S c h o u t e : "Mehrdimensionale Geometrie", 1.u.2.Teil, Sammlung Schubert XXXV/XXXVI.

ein R_k , S_k , ein $[k]$ genannt, wenn die Mannigfaltigkeit seiner Punkte k-fach ist. Für k=o,1,2,(n-1) benennen wir ihn speziell mit Punkt, Gerade (Strahl), Ebene, Hyperebene.

Mit dem Namen "einförmiges Grundgebilde" oder " k -Büschel" werde die Gesamtheit aller $[k]$ belegt, die einen $[k-1]$, seine "Achse", enthalten und selbst in einem $[k+1]$ seinem "Träger", enthalten sind; für k=o, also die "gerade Punktreihe", hat die erste Bedingung keinen Sinn.

2.

Von großer Bedeutung in der projektiven Geometrie sind die A b z ä h l u n g e n , Ergebnisse der Kombinatorik und der Theorie der linearen Gleichungssysteme und Matrizen.Wir werden sagen, die Mannigfaltigkeit, Anzahl eines Gebildes ist unendlich mit dem Exponenten z oder "z-fach unendlich", oder kurz: ein Gebilde ist "von der Konstantenzahl z", und meinen damit, daß zu seiner Bestimmung z unabhängige Parameter gewählt werden können.

Ein $[k]$ im R_n ist eindeutig bestimmt durch (k+1) seiner Punkte, von denen keine $(\ell+2)$ in einem $[\ell]$ liegen. Sie heißen dann linear "unabhängig" oder "Punkte allgemeiner Lage".(k+2) oder mehr Punkte eines $[k]$ sind stets abhängig. Weil jeder der (k+1) zu wählenden Punkte im $[n]$, bzw. $[k]$ von der Konstanten-Zahl n, bzw. k ist, so ist die Mannigfaltigkeit der $[k]$ im R_n unendlich hoch

$$(k+1)\cdot(n-k).$$

Ersetzen wir hier die Zahl k durch (n-k-1), so bleibt der Exponent derselbe, was besagt, daß es im R_n gleich viele Punkte wie Hyperebenen,allgemein gleich viele $[k]$ wie $[n-k-1]$ gibt. Dies ist die Grundlage für das Gesetz der Dualität.

Erfüllen die gemeinsamen Punkte eines $[k]$ und eines $[\ell]$ einen $[m]$,ihren "Durchschnitt", so ist ihr "verbindender Raum", das ist der Raum niedrigster Dimension,der sie beide enthält,ein $[k+\ell-m]$. Fehlen gemeinsame Punkte, liegen also die Räume "windschief", setze man m=-1. Da der Verbindungsraum höchstens der Operationsraum R_n sein kann, ist die Dimension des Durchschnitts

$$m \geq k + \ell - n .$$

Für unabhängige Räume gilt das Gleichheitszeichen.

Das System der $[k]$ durch einen gegebenen $[m]$ in R_n ist von der Parameterzahl $(n-k)\cdot(k-m)$. Für m=-1 ergibt sich wieder die Anzahl aller $[k]$ im R_n .

3.

Alle Verbindungsräume von m Punkten bilden ein "vollständiges m-Eck"; speziell bilden (n+1) unabhängige Punkte ein vollständi-

ges (n+1)-Eck, das nach P.H. Schoute "S i m p l e x" heiße. Jene Punkte sind seine "Scheitel, Ecken", die $\frac{n(n+1)}{2}$ Verbindungsgeraden von je zwei Punkten seine "Kanten" oder "Seiten";die (n+1) Hyperebenen,die je n Punkte verbinden,seine "Seitenhyperebenen,Wände". Projiziert man ein $[n-1]$-Simplex in einer Hyperebene aus einem Punkte außerhalb dieser, so entsteht ein neues Simplex im R_n, das der "Schein" des alten ist.Ein Simplex teilt den Raum in 2^n Teile. Gibt man den Scheiteln eines Simplex eine bestimmte Reihenfolge, so erhält es einen Sinn,analog dem Umlaufssinn eines ebenen Dreiecks. Die Mannigfaltigkeit des Systems aller Simplexe im R_n ist $n\cdot(n+1)$-fach.

Die oben genannten homogenen Koordinaten eines Punktes sind analog den Tetraëderkoordinaten des R_3, bezogen auf dasjenige Grundsimplex oder Koordinatensimplex, dessen Scheitel wir erhalten, wenn wir alle Koordinaten außer einer gleich Null setzen. Wie für den R_3 können wir auch die Koeffizienten ξ_i einer linearen Gleichung $\sum_0^n \xi_i x_i = 0$ einer Hyperebene als deren Hyperebenenkoordinaten auffassen.

Als Erweiterung des Begriffs der Polyeder des R_3 führen wir den Namen "Polytope" ein und verstehen darunter endlich viele Hyperebenen samt ihren Durchschnitten; schließlich noch die Bezeichnung: "Hyperflächen 2.Ordnung, $[n]$-Flächen 2.O. oder V^2_{n-1}" für die Gesamtheit der ∞^{n-1} Punkte des R_n,deren Koordinaten einer quadratischen Gleichung genügen.Für solche gebogenen oder krummen Unterräume des R_n wollen wir nie das Wort Raum benützen, wie es in der Literatur manchmal geschieht.

§ 2. Definition und Erzeugung der Kollineation.

4.

Sind x_k und x'_i (i,k=o,1,2,....,n) Simplexkoordinaten in zwei Räumen gleicher Dimension, R_n und R'_n, und wird jedem Punkt P von R_n der Punkt P' in R'_n durch

$$(\alpha) \qquad x'_i = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i=o,1,....,n)$$

zugewiesen, wobei alle a_{ik} reell sind und die Determinante $A = |a_{ik}|$ nicht verschwindet,so heißt R_n durch die "g e w ö h n l i c h e[8]

8) Wir vermeiden das Wort "regulär", das oft an Stelle von "gewöhnlich" gebraucht wird, weil es bei Segre eine andere Bedeutung hat (vgl. Nr.7). Die singulären Ausartungen (A=o) bleiben in der ganzen Arbeit ausgeschlossen. Die meisten Sätze der Schrift werden auf die singulären Kollineationen, die nicht mehr eineindeutige Punktabbildungen sind, gedanklich leicht durch Betrachtung von Räumen niedriger Dimension, sprachlich aber umständlich übertragen.

Kollineation" α auf den Raum R_n' abgebildet. Das lineare Gleichungssystem ist umkehrbar. Die gewöhnliche Kollineation ist eine ein-eindeutige Punkt-Korrespondenz derart, daß den Punkten jeder Hyperebene im einen Raum wieder Punkte einer Hyperebene im andern Raum entsprechen und jede Inzidenz gewahrt bleibt. Dadurch ist die gewöhnliche Kollineation synthetisch schon vollständig charakterisiert. Es folgt, daß jedem linearen Raum ein linearer entspricht; diese sind selbst wieder kollinear aufeinander bezogen. Besonders ist jede gerade Punktreihe ihrer entsprechenden projektiv: das Doppelverhältnis ist invariant gegen α.

Raumkurven und Hyperflächen m=ter Ordnung und p=ter Klasse gehen in ebensolche über; ebenso ihre Doppelpunkte, Rückkehrpunkte, Tangenten, Doppeltangenten, Rückkehrtangenten usw. Auch enthalten kollinear-verwandte Hyperflächen - d.h. solche, deren Punkte sich in einer Kollineation entsprechen - lineare Räume gleicher Dimension, Anzahl und Anordnung; oder: diese Hyperflächen sind "gleichartig" bezüglich ihrer linearen Räume.

5.

Eine gewöhnliche Kollineation ist eindeutig e r z e u g t durch Zuordnung von je (n+2) unabhängigen Punkten. Dies folgt, wenn man den Begriff des Möbius'schen Netzes auf den R_n erweitert, oder durch vollständige Induktion. Nämlich die Projektivität der Geraden ist durch drei Punktepaare bestimmt. Sei der Satz für den $[n-1]$ schon bewiesen, so folgt daraus der Beweis für den $[n]$ folgendermaßen: Wir verbinden n der (n+2) Punkte durch eine Hyperebene α bzw. α'. Die Verbindungsgeraden der restlichen 2 Punkte treffen α bzw. α' in entsprechenden Punkten P und P'. Die Kollineation zwischen α und α' ist jetzt durch (n+1) unabhängige Punktepaare bestimmt, nach Voraussetzung, ebenso die Projektivität auf jenen Verbindungsgeraden. Jeder Hyperebene in R_n ist eindeutig eine solche in R_n' zugeordnet, also auch jedem Punkte eindeutig ein solcher.

Daraus ergeben sich unter anderen folgende Erzeugungsmethoden der Kollineation, die leicht ineinander übergeführt werden können: 1.) durch je 2 kollineare Hyperebenen, die jedoch so bezogen sind, daß den Punkten ihres Durchschnitts beidesmal dieselben Punkte entsprechen; 2.) durch je n projektive Punktreihen auf je n Geraden, die durch einen Punkt O bzw. O' gehen, aber sonst unabhängig sind, wobei aber stets O und O' einander zugewiesen seien; und die hiezu dualen Methoden, z.B. 3.) durch je (n+2) Hyperebenen allgemeiner Lage usw. Von Interesse wird uns die zweite Erzeugung durch ein Entupel von geraden Punktreihen aus einem Punkte sein.

§ 3. Doppelelemente der Kollineation.

6.

Bisher ließen wir das gegenseitige projektive Verhalten der Punkte von R und R' außer acht. Wir dachten uns die Räume als getrennt. Nun wollen wir annehmen, R und R' seien "k o l l o k a l" oder "k o n j e k t i v" [9], d.h. jeder Punkt von R' sei auch ein solcher von R, wobei er aber nicht sein Bildpunkt zu sein braucht. Die Koordinaten mögen auf dasselbe Grundsimplex bezogen sein.

Jedes Element, das mit seinem entsprechenden identisch ist, heißt "D o p p e l e l e m e n t (Deckelement, Koinzidenzelement, Fixelement". Hat $\mathfrak{A}$ (n+2) unabhängige Fixpunkte, so ist es die Identität: Jeder Punkt fällt mit seinem entsprechenden zusammen. Denn $\mathfrak{A}$ ist durch jene Fixpunkte eindeutig bestimmt, und die Identität ist eine Kollineation. Analytisch ist die Identität dargestellt durch

$$x_i' = \sum_{k=0}^{n} a\,\delta_k^i\,x_k = a x_i \qquad (i=0,1,2,\ldots,n),$$

wo a beliebig ist, aber nicht verschwindet und

$$\delta_k^i = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

das bekannte Kronecker'sche Symbol sei, das wir häufig benützen werden. Aber $\mathfrak{A}$ kann unendlich viele Doppelpunkte haben, ohne die Identität zu sein, wenn diese z.B. auf einer Geraden liegen.

Für einen Doppelpunkt von $\mathfrak{A}$ muß $\varrho x_i' = x_i$ sein, woraus die "Koinzidenzgleichung von $\mathfrak{A}$ (Hamilton-Cayley'sche Gleichung)"

$$\Delta(\varrho) = |a_{ik} - \delta_k^i \varrho| = \begin{vmatrix} a_{00}-\varrho & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11}-\varrho & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}-\varrho & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

folgt. Sie hat (n+1) Wurzeln, die auch zu zweien konjugiert imaginär sein können, für gerades n sicher eine reelle. C.Segre[10]

---

9) In der Bedeutung der letzteren Bezeichnung ist die kollineare Beziehung schon einbegriffen.

10) C. S e g r e : "Sulla teoria....", a.a.O.2). - Eine kurze Darstellung der Elementarteilertheorie in SFK5), Kap.XII, S.468 ff.

hat, nach dem Gesichtspunkt der Doppelelemente, mit Hilfe der Elementarteilertheorie die Kollineationen des R_n klassifiziert und die Örter der Fixpunkte Haupträume genannt. Unsere "metrischen Haupträume" im II. Teil werden aber ganz andere sein.

7.

Wir betrachten noch besonders die "r e g u l ä r e (allgemeine)" Kollineation, bei der (n+1) verschiedene, unabhängige Fixpunkte existieren, die aber immer noch teilweise imaginär sein können, im Gegensatz zur "partikulären". Erstere liegt vor, wenn alle Elementarteiler 1 sind. Wir werden nämlich im Teil II aus $\mathfrak{A}$ eine andere Kollineation $\mathfrak{L}$ herleiten, die eine reguläre ist und sogar lauter reelle Wurzeln ϱ der Koinzidenzgleichung besitzt.

Sind zwei Wurzeln ϱ_σ einander gleich, so trägt die Verbindungsgerade der zugehörigen Fixpunkte lauter Doppelpunkte. Dieser Schluß gilt nicht bei der partikulären Kollineation, denn bei ihr könnten die beiden zugehörigen Fixpunkte unendlich nahe beieinander liegen. Sind p Wurzeln gleich, so trägt der zugehörige Verbindungs-$[p]$ lauter Koinzidenzpunkte. Durch verschiedene Gruppen gleicher Wurzeln entstehen die verschiedenartigsten Verallgemeinerungen der axialen, gescharten und perspektiven Kollineation des R_3. Die "Perspektivität (Homologie)" ergibt sich, wenn alle Wurzeln außer einer gleich sind. Sie hat eine Hyperebene als Ort von Fixpunkten und außerdem einen Fixpunkt Z außerhalb jener, überdies jene Hyperebene und alle Räume durch Z als Fixräume. Jede Verbindungslinie homologer Punkte trifft Z, das deshalb "Perspektivitäts-Zentrum" genannt wird.

8.

Die Wurzeln ϱ_σ $(\sigma = 0,1,2,\ldots,n)$ und ihre symmetrischen Funktionen, die Koeffizienten der Potenzen von ϱ in der Entwicklung der Koinzidenzgleichung $\Delta(\varrho) = 0$, sind relative I n v a r i a n t e n[11] der Kollineation in dem Sinne, daß sie proportional bleiben, wenn man $\mathfrak{A}$ dadurch in eine andere Kollineation überführt, daß man beide Räume R und R' durch dieselbe gewöhnliche Kollineation in

---

11) Für Räume ungerader Dimension hat die Invarianz des Vorzeichens von A eine geometrische Bedeutung, nämlich die, daß der Sinn irgend zweier entsprechender Simplexe in R und R' nach der Transformation derselbe bzw. verschieden ist, wenn er vorher gleich bzw. verschieden war. Für gerades n dreht aber das Vorzeichen von A schon, wenn wir in der Kollineations-Determinante jedes Element mit -1 multiplizieren; dabei ist die Kollineation immer noch dieselbe. Der tiefere Grund für Unterschiede zwischen den Räumen gerader und ungerader Dimension, die uns oft begegnen werden, liegt darin, daß der projektive R_n einseitig oder zweiseitig ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist; vgl. Enzykl. d. math. Wiss., III C 7, S. 788, Fußnote 68.

zwei andere transformiert. Denn letztere sind die Simultaninvarianten zweier Bilinearformen mit den Matrizen $|a_{ik}|$ und $|\varrho\,\delta_k^i|$, also der Kollineation $\mathfrak{A}$ und der Identität. Wird durch die genannte Transformation das Fixsimplex zum Koordinatensimplex, so erhält $\mathfrak{A}$ die einfache, "projektiv-kanonische Form": $x_i' = \varrho_i x_i$; allerdings werden hier die Koordinaten und Koeffizienten nur reell, wenn es das Fixsimplex ist. Man folgert dann leicht:

Die $\frac{n(n+1)}{2}$ Verhältnisse je zweier Wurzeln ϱ_σ und ϱ_τ, absolute Invarianten im obigen Sinne, bedeuten die Doppelverhältnisse[12]

$$\lambda_{\sigma\tau} = \varrho_\sigma : \varrho_\tau = (D_\sigma D_\tau P P'),$$

wo D_σ, D_τ die zugehörigen Fixpunkte und P, P' zwei homologe Punkte auf der Verbindungsgeraden sind. Wesentlich sind aber bloß n unabhängige von ihnen. Man wähle z.B. die n Doppelgeraden $D_0 D_\tau$ durch den Scheitel D_0 des Fixsimplex (Spezialfall der zweiten Erzeugungsmethode in Nr.5).

Wir können den Namen: "Wurf der Kollineation" (nach Kohn), diesen Begriff auf den R_n erweiternd, dem Punktwurf[12]

$$D_0 D_1 D_2 \cdots D_n Q' \mathfrak{A} \qquad (Q,\ Q' \text{ beliebige hom. Punkte})$$

beilegen und darunter alle Doppelverhältnisse verstehen, die auftreten, wenn wir die Verbindungsgerade irgend zweier Punkte des Wurfs mit den (n+1) Wänden des Simplex der andern (n+1) Punkte schneiden. Die (n+3) Punkte jeder solchen Verbindungsgeraden sind projektiv, was immer für homologe Punkte Q, Q' auch gewählt seien, und enthalten gerade die Doppelverhältnisse $\lambda_{\sigma\tau}$. Speziell die Geraden QQ' bilden das Analogon zum Reye'schen tetraëdalen Komplex, einen Wald von ∞^n Geraden, die die Wände des Fixsimplex in projektiven Punktreihen treffen.

Durch duale Betrachtungsweise, wenn man die Doppelpunkte durch die Fixwände ersetzt und sich die Räume statt als Punkträume als Hyperebenenräume vorstellt, findet man analoge Büschel von Hyperebenen, die untereinander und zu den angeführten Punktreihen projektiv sind. Denn $\mathfrak{A}$ gibt, in Hyperebenenkoordinaten dargestellt, dieselbe Koinzidenzgleichung.

---

12) R. S t u r m: "Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften", 4 Bände (1908/09); III § 74, S.37 ff.

§ 4. Das Rechnen mit Verwandtschaften.[13]

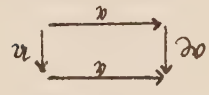
9.

Hier seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{L}, \mathfrak{L}', \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ irgendwelche ein-eindeutige Korrespondenzen von Gebilden, z.B. gewöhnliche Kollineationen. Werden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{L}$ nacheinander ausgeführt, d.h. wird einem Gebilde durch $\mathfrak{a}$ ein zweites, diesem zweiten durch $\mathfrak{L}$ ein drittes zugeordnet, und ist $\mathfrak{L}'$ diejenige Verwandtschaft, welche das erste Gebilde sofort in das dritte überführt, so schreiben wir:

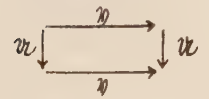
$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{L}$$

und sagen: $\mathfrak{L}'$ ist das "P r o d u k t" von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{L}$, wobei die Reihenfolge nicht gleichgültig ist; $\mathfrak{L}'$ ist aus $\mathfrak{a}$ durch "Nachmultiplizieren mit $\mathfrak{L}$" und aus $\mathfrak{L}$ durch "Vormultiplizieren mit $\mathfrak{a}$" entstanden.

Die Transformation, welche das genannte zweite Gebilde in das ursprüngliche überführt, wird als "U m k e h r u n g $\mathfrak{a}^{-1}$" von $\mathfrak{a}$ bezeichnet. Stets ist $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \equiv 1$, d.h. gleich der Identität. - Ist $\mathfrak{a}$ gleich seiner Umkehrung: $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{-1}$, dann folgt durch Vormultiplizieren mit $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a}^2 \equiv 1$. $\mathfrak{a}$ heißt "zyklisch vom Grade 2" oder "involutorisch".



Figur a.)



Figur b.)

Wenn (Figur a.) $\mathfrak{w} = \mathfrak{v}^{-1}\mathfrak{u}\mathfrak{v}$ gilt, so sagen wir: $\mathfrak{u}$ wird durch $\mathfrak{v}$ in $\mathfrak{w}$ "übergeführt, verwandelt". Führt $\mathfrak{v}$ aber $\mathfrak{u}$ in sich selbst über, so folgt aus $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}^{-1}\mathfrak{u}\mathfrak{v}$ durch Vormultiplizieren (oder aus Fig.b.) sofort: $\mathfrak{u}\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\mathfrak{u}$; die beiden sind vertauschbar. Dann geht auch $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{u}$ in sich über.

10.

Das "P o l a r s y s t e m $\mathfrak{p}$"[14] ist eine involutorische Verwandtschaft kollokaler Räume derart, daß es die Punkte und Hyperebenen, die $[k]$ und $[n-k-1]$ seines Trägerraumes R_n paart und Doppelverhältnisse konstant läßt, aber so, daß nicht jeder Punkt

---

13) Vgl.bes. Enzykl.d.math.Wiss. IIIAB5, Nr.3 mit derselben Überschrift, und T h. R e y e, R III 4), 23./26.Vortrag, S.173 f.
14) Enzykl.d.math.Wiss. IIIC7, S.831; E. B e r t i n i, a.a.O. 7), Kap.VI, S.126 ff.

in seiner homologen Hyperebene liegt. Es ist analytisch dargestellt durch

$$(\mathfrak{P}) \qquad \sum_{i=0}^{n}\sum_{\kappa=0}^{n} p_{i\kappa}\, x_i\, x'_\kappa = \sigma \qquad \text{mit} \qquad p_{i\kappa} = p_{\kappa i} \ .$$

Der Ort der Punkte, die in ihrer konjugierten Hyperebene liegen, ist eine Hyperfläche zweiter Ordnung, die "Inzidenzfläche von $\mathfrak{P}$"; man erhält sie, wenn man in der Gl.($\mathfrak{P}$) die Striche wegläßt. Jene Inzidenz-Hyperebenen sind ihre Tangentialräume. Es können aber auch gar keine reellen Inzidenzpunkte existieren; die Inzidenzfläche ist imaginär und das "elliptische" Polarsystem $\mathfrak{P}$ deren reelles geometrisches Substrat.

Wählen wir in einem Polarsystem einen beliebigen Punkt T_1, dann in seiner entsprechenden Hyperebene τ_1 einen beliebigen Punkt T_2, so ist seine homologe Hyperebene τ_2 mit T_1 inzident; wählen wir weiter T_3 beliebig im Durchschnitt $(\tau_1\tau_2)$ und so fort, so entsteht schließlich ein "Polarsimplex", von dem jeder Scheitel seiner gegenüberliegenden Wand zugeordnet ist. Ein Polarsystem ist eindeutig bestimmt durch ein Polarsimplex und noch einen Punkt mit seiner konjugierten Hyperebene. Die Anzahl aller Polarsysteme im R_n ist demnach unendlich hoch

$$\binom{n}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2} \ .$$

Wenn in $\mathfrak{P}$ der Punkt A und die Hyperebene α konjugiert sind, so ist jedem Punkte B von α eine β durch A zugewiesen. Ordnen wir in α jedem B den Durchschnitt-$[n-2]$ (α/β) zu, so entsteht in α ein $[n-1]$-Polarsystem, das wir durch $\mathfrak{P}$ "induziert" nennen. Analog für niederere Räume. Zum Beispiel induziert jedes Polarsystem in einer Geraden eine Punktinvolution.

11.

Das g e m e i n s a m e P o l a r s i m p l e x von zwei Polarsystemen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ im R_n ist das Fixsimplex der Kollineation $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$. Von grundlegender Bedeutung für die metrischen Eigenschaften der Kollineationen in Euklidischen Räumen ist folgender projektive

Satz: Wenn von zwei kollokalen, gewöhnlichen Polarsystemen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ wenigstens das eine elliptisch ist, so besitzen sie mindestens ein reelles, gemeinsames Polarsimplex, d.h. ihre Produkte $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{L}^{-1} = \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1$ sind Kollineationen mit reellen Koinzidenzsimplexen.

Für die Gerade ist dieser Satz ja bekannt. Die Polarsysteme reduzieren sich hier auf zwei Punktinvolutionen, die sicher ein ge-

meinsames entsprechendes Punktepaar besitzen, wenn auch nur eine elliptisch ist.[15)]

Aus der Elementarteilertheorie[16)] folgt zuerst, daß das Produkt $\mathfrak{L}$ eine reguläre Kollineation ist und ihr Fixsimplex nicht entarten kann. Denn weil die kanonische Form des elliptischen Polarsystems eine definite Form ist, sind alle Elementarteiler eins. Um die Realität dieses Fixsimplex zu zeigen, benützen wir den Satz, daß eine Kollineation $\mathfrak{L}$ bei geradem n mindestens einen reellen Doppelpunkt und bei ungeradem n eine reelle Doppelgerade, im Notfall die Verbindungsgerade zweier konjugiert-imaginären Punkte, besitzt. Auf der Doppelgeraden induziert das elliptische Polarsystem eine elliptische Punktinvolution und hat also mit dem andern Polarsystem ein reelles konjugiertes Punktepaar gemeinsam. Bei geradem n betrachte man die dem reellen Doppelpunkt gegenüberliegende Doppelwand und die in ihr induzierten beiden Polarsysteme. So kommt man stufenweis zum vollständigen gemeinschaftlichen Polarsimplex, dem Koinzidenzsimplex von $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{L}^{-1} = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_1$.

II. Teil.

Metrische Geometrie der Kollineationen.

§ 5. Der Euklidische Raum und seine Fundamentalkollineationen.

12.

Jetzt kommen wir zum eigentlichen Thema der Arbeit. Ziel ist die Erreichung einer besseren Anschaulichkeit der Kollineationen und ihrer Verzerrungsverhältnisse dadurch, daß wir diejenigen Eigenschaften der Abbildung untersuchen, die unabhängig von der gegenseitigen Lage der Räume sind. Damit haben wir aber schon die Domäne der projektiven Geometrie überschritten. Denn die Unabhängigkeit von der gegenseitigen Lage kommt zustande, wenn wir solche Kollineationen als gleichwertig oder "äquivalent" betrachten, die ineinander übergehen, wenn wir den einen oder den andern

---

15) Vgl. z.B. Th. R e y e, R I 4), S.192. - Ein rein synthetischer Beweis für den R$_n$ ist mir nicht gelungen.

16) Vgl. 10) und O. S t a u d e, Enzykl.d.math.Wiss., III C 2, S.175.

der beiden Räume oder beide ganz beliebig in R_n bewegen. Der Begriff "Bewegung" aber entstammt der Elementargeometrie des Euklidischen Raumes und bedeutet eine Punkttransformation, die alle Strecken, Winkel und Sinne ungeändert läßt. Zwar wurde er auch auf nichteuklidische Räume übertragen; wir legen jedoch von jetzt an für immer den n-dimensionalen, Euklidischen Raum zugrunde. Für das Verständnis der genannten Eigenschaften ist nur noch vonnöten, daß wir kurz den Weg beleuchten, der von der projektiven Geometrie zur E u k l i d i s c h e n M e t r i k führt und den uns C a y l e y ("projective geometry is all geometry") und K l e i n aufgezeigt haben.

Auf diesem Weg ist die affine Geometrie eine erste Zwischenstation. Sie entsteht aus der projektiven Geometrie durch Adjunktion einer "uneigentlichen" Hyperebene, der "unendlich fernen Wand $\bar{\omega}$ ". Die Punkte außerhalb $\bar{\omega}$ sind "eigentliche". Zwei Unterräume, deren Durchschnitt nur uneigentliche Punkte hat, werden "(total) parallel" genannt. Es gibt verschiedene Grade des teilweisen Parallelismus[17] zweier Räume, je nach dem Grade, in dem ihre uneigentlichen Punkte abhängig sind.

Durch weitere Adjunktion des elliptischen "absoluten (Euklidischen) Polarsystems $\bar{\pi}$ " in $\bar{\omega}$ entsteht die äquiforme Geometrie. Zwei Geraden sind "orthogonal, normal, senkrecht", wenn ihre unendlich fernen Punkte konjugiert bezüglich $\bar{\pi}$ sind. Analog definiert man Orthogonalität von Räumen und unterscheidet verschiedene Grade, wie beim Parallelismus; aber jetzt nach dem Grade, wie die uneigentlichen Punkte des einen Raumes und die den uneigentlichen des andern in $\bar{\pi}$ konjugierten Punkte abhängig sind. Weil $\bar{\pi}$ elliptisch ist, schließen sich z.B. die Begriffe "total parallel" und "total orthogonal" aus.

Setzen wir noch eine Einheitsstrecke OQ fest, so sind wir in der metrischen Geometrie angelangt. Durch $\bar{\pi}$ in $\bar{\omega}$ und OQ ist das Polarsystem der "Einheits-Hyperkugel (Einheits-Sphäre)" um O gegeben, welche der Ort der ∞^{n-1} Punkte in R_n ist, die vom Mittelpunkt O die Entfernung 1 haben. Umgekehrt ist durch die Einheitssphäre und $\bar{\omega}$ das Absolute, $\bar{\pi}$, bestimmt.

Analog spezialisieren wir das Koordinatensimplex schrittweise, und setzen fest: 1.) Daß eine Wand ($x_0 = \sigma$) die uneigentliche sei, die gegenüberliegende Ecke O, der "Ursprung", aber ein beliebiger eigentlicher Punkt. Die Verhältnisse

$$x_{K0} = x_K : x_0$$

---

17) Genaueres bei P. H. S c h o u t e, a.a.O.7), I.Teil, § 2.

sind die "inhomogenen" Koordinaten eines eigentlichen Punktes.
2.) Daß die n eigentlichen Kanten aus O, die "Koordinaten-Achsen", alle paarweis orthogonal sein sollen, d.h. daß das Simplex der Schein eines Polarsimplex von $\bar{\pi}$ in $\bar{\omega}$ sei. Dann ist die imaginäre Inzidenzfläche von $\bar{\pi}$, die wir "unendlich-ferne Kugelsphäre" des R_n nennen analog dem unendlichfernen Kugelkreis des R_3, dargestellt durch

$$(\bar{\pi}) \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0 \; ; \; x_0 = 0 \; .$$

Alle [n]-Sphären treffen $\bar{\omega}$ in $\bar{\pi}$.
3.) Schließlich setzen wir noch fest, daß die Einheitssphäre eine Achse gerade in ihrem Einheitspunkt (z.B. $x_{10} = 1$, $x_{20} = x_{30} = \cdots = x_{n0} = 0$) treffe. Dies ist dann auch für die anderen Achsen der Fall. Die Gleichung der Einheitssphäre um O lautet:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{k0}^2 = 1 \qquad \text{oder}$$

homogen

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = x_0^2 \; .$$

Hat schließlich das Grundsimplex stets denselben Sinn[18], so nennen wir seine Koordinaten "Cartesische Koordinaten eines orthogonalen Rechtssystems". Von nun an seien stets solche angenommen.

Weil das Absolute eine Hyperfläche 2.O. ist, spielt die Theorie der Polarsysteme und Mannigfaltigkeiten 2.O. in der Euklidischen Metrik eine fundamentale Rolle und in ganz besonderem Maße bei der metrischen Betrachtungsweise der Kollineation, die wir durchführen. Ja, unsere ganze Darstellung wird nichts als eine Lehre von den Kontinuen 2.Grades sein, nur aus anderem Gesichtspunkte. Als Grundlage aber benützen wir außer der projektiven Geometrie nur die aus der Gleichung der Einheitssphäre sofort resultierenden Transformationsgleichungen, die orthogonale Substitutionen, d.h. Bewegungen, vermitteln. Es ist der natürlichste und unabhängigste Weg.

13.

Die einfachsten Kollineationen sind die mit der Identität äquivalenten, die B e w e g u n g e n. Dabei werden also das absolute Polarsystem und die Einheitsstrecke in sich selbst übergeführt. Erstere Bedingung wird am trivialsten dadurch erfüllt,

---

18) Dieser ist nun auch bei geradem n invariant gegen jede Bewegung, weil $\bar{\omega}$ einen Schnitt durch den einseitigen R_n führt.

daß alle uneigentlichen Punkte Fixpunkte sind, bei der "Translation";der Raum wird um ein endliches Stück parallel verschoben. Beim "Versor um O" jedoch ist O Deckelement; er entsteht z.B. bei Rotation um einen [n-2] durch O. Hat eine Translation auch einen eigentlichen Fixpunkt, so ist sie die Identität. Beide Begriffe haben deshalb nur diese gemein und schließen sich sonst aus. Der Einfachheit des Ausdrucks halber haben wir die Identität bei beiden einbezogen, obwohl dies sonst nicht gebräuchlich ist.

Das Gleichungssystem

$$(1)\qquad \begin{cases} x_k = \sum_{\sigma=1}^{n} \eta_{k\sigma} X_\sigma + m_{k0} X_0 \\ x_0 = X_0 \end{cases} \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

können wir in zweifacher Weise auslegen. Einmal, wenn die großen und kleinen Koordinaten auf dasselbe System bezogen seien, als Kollineation, oder aber, wenn die aus den Koordinaten X_0, X_σ resultierenden Koordinaten x_0, x_σ noch demselben Punkte gehören sollen, als "T r a n s f o r m a t i o n d e s K o o r d i n a t e n s y s t e m s". Zuerst nahmen wir eine aktive, dann eine passive Deutung der Formeln vor. Für uns werden sie - im zweiten Sinne - den Übergang vom alten System der kleinen Koordinaten zum neuen System der großen vermitteln. Analog bedeuten im Raume R' die Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{cases} x'_i = \sum_{\rho=1}^{n} \eta'_{i\rho} X'_\rho + x'_{i0} X'_0 \\ x'_0 = X'_0 \end{cases} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

eine Koordinatentransformation.

Die Zahlen m_{k0} bzw. n'_{i0} sind die inhomogenen Koordinaten des neuen Ursprungs im alten System. Sollen die neuen Systeme wieder Cartesische sein, so müssen die "Richtungskosinus" [19] $\eta_{k\sigma}$ bzw. $\eta'_{i\rho}$ die Elemente von n-reihigen "orthogonalen Determinanten" sein und den Fundamentalrelationen

$$(3a)\quad (3b)\qquad \sum_{k=1}^{n} \eta_{k\rho}\,\eta_{k\sigma} = \delta_\sigma^\rho = \begin{cases} \sigma & \text{für } \rho \neq \sigma \\ 1 & \text{für } \rho = \sigma \end{cases} \qquad (\rho, \sigma = 1,2,\ldots,n),$$

bzw.

$$(4a)\quad (4b)\qquad \sum_{i=1}^{n} \eta'_{i\rho}\,\eta'_{i\sigma} = \delta_\sigma^\rho$$

---

19) Es bedeuten $\eta_{1\sigma}, \eta_{2\sigma}, \eta_{3\sigma}, \ldots, \eta_{n\sigma}$ die Kosinus des Winkels der neuen σ-ten Achse $(X_1 = X_2 = \cdots = X_{\sigma-1} = X_{\sigma+1} = \cdots = X_n = 0)$ mit den alten Achsen; vgl. Enzykl.d.math.Wiss.III C 7, S.800.

genügen. Die Umkehrung von (1) ist dann einfach:

$$(\bar{1}) \qquad \begin{cases} X_\varrho = \sum_{\kappa=1}^{n} \eta_{\kappa\varrho} x_\kappa - \sum_{\kappa=1}^{n} \eta_{\kappa\varrho} m_{\kappa 0} x_0 \\ X_0 = x_0 \end{cases} \qquad (\varrho = 1,2,\ldots,n),$$

d.h. im wesentlichen die transponierte von Gl. (1). Deshalb sind den Gl. (3), bzw. (4) äquivalent die Gleichungen

$$(\overline{3\ ab}) \qquad \sum_{\varrho=1}^{n} \eta_{i\varrho}\,\eta_{k\varrho} = \delta_k^i$$

$$(i,k=1,2,\ldots,n)$$

bzw.

$$(\overline{4\ ab}) \qquad \sum_{\varrho=1}^{n} \eta'_{i\varrho}\,\eta'_{k\varrho} = \delta_k^i .$$

Aber wir unterließen am Anfang dieser Nummer noch den Zusatz, daß der Sinn entsprechender Simplexe erhalten bleiben, und in der Mitte der Nummer bei der analytischen Definition, daß die orthogonale Determinante den Wert + 1 besitzen müsse. Aus den Gl. (3ab) folgt nur, daß ihr Quadrat gleich 1 ist. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, dann liegt statt einer positiven Kongruenz eine negative vor, eine "Symmetrie" oder "Umlegung". Der einfachste Fall ist die "Spiegelung", bei der eine eigentliche Hyperebene als Ort von Fixpunkten existiert, dargestellt z.B. durch

$$\begin{cases} X'_{\varrho 0} = X_{\varrho 0} \\ X'_{n0} = -X_{n0}\ , \end{cases} \qquad (\varrho = 1,2,\ldots,n-1)$$

wenn die Koordinatensysteme zusammenfallen. Zu bemerken ist noch, daß eine Symmetrie durch Bewegung über einen höheren Raum in eine positive Kongruenz verwandelt werden kann. Wir wollen deshalb dem Unterschied der Sinne nicht unnötig viel Aufmerksamkeit schenken.

14.

Bei der "Ähnlichkeit" wird wohl das absolute Polarsystem in sich übergeführt, nicht aber die Einheitsstrecke. Jede Einheitsstrecke wird in ein Stück von stets derselben Länge a transformiert, jede Strecke überhaupt in eine a-fache. Jeder Winkel bleibt konstant. Der Raum wird einfach von einem festen Punkt, dem "Ähnlichkeitspunkt" aus, nach allen Richtungen im selben Verhältnis a zentrisch gedehnt und dann bewegt. Alle Ähnlichkeiten mit demselben "Ähnlichkeitsfaktor" a sind äquivalent. Ist a speziell gleich 1, so haben wir wieder die Kongruenz.

Der Unterschied zwischen positiver und negativer Ähnlichkeit

liegt analog dem bei der Kongruenz. Führen wir durch zentrische Symmetrie (a=-1) jeden Punkt in den bezüglich des Ähnlichkeitspunktes spiegelbildlichen über, so entsteht bei ungeradem n Symmetrie, bei geradem n Kongruenz.

15.

Die nächsthöhere anschauliche Fundamentalkollineation ist der "T e n s o r": Man dehne (bzw. presse) den Raum R_n zuerst von der Koordinatenwand $X_1 = o$ aus in der Richtung der dazu senkrechten ersten Achse im Verhältnis Λ_{10}, dann nacheinander von den Wänden $X_2 = o, \ldots, X_n = o$ aus im Verhältnis $\Lambda_{20}, \ldots, \Lambda_{n0}$ [20]. Jedesmal bleibt jeder Punkt der zugehörigen Koordinatenwand fest, und jede Hyperebene parallel zu ihr wird parallel und kongruent verschoben. Daraus folgt die Unabhängigkeit von der Reihenfolge der einzelnen Dehnungen.

Der analytische Ausdruck für den Tensor ist das wichtige Gleichungssystem

$$(I)\quad \begin{cases} \text{homogen:} & X'_\varrho = \Lambda_\varrho X_\varrho & (\varrho = o,1,2,\ldots,n) \\ \text{oder} & & \\ \text{inhomogen:} & X'_{k0} = \Lambda_{k0} X_{k0} & \\ & & (k=1,2,\ldots,n) \\ \text{mit:} & \Lambda_{k0} = \Lambda_k : \Lambda_0 . & \end{cases}$$

Beide Koordinatenreihen in R_n und R'_n seien auf dasselbe Koordinatensystem bezogen, das "Hauptsystem des Tensors". Der Ursprung, der "Mittelpunkt" des Tensors, ist Fixpunkt, ebenso die unendlich fernen Punkte der n "Hauptachsen". Ein Tensor ist eindeutig bestimmt durch sein Hauptsystem und die n Zahlen Λ_{k0}, seine "Komponenten", welche gerade die Ähnlichkeitsfaktoren auf den Hauptachsen, also die Doppelverhältnisse λ_{k0} der Nr.8 sind. Der gewöhnliche Tensor hat lauter nichtverschwindende Komponenten. Sind sie alle gleich a, so haben wir eine Ähnlichkeit mit dem Faktor a. Der Tensor wird uns immer in der Form begegnen, daß seine

---

20) Der Tensor knüpft unmittelbar an die Methode an, mit der man dem Laien am ehesten eine ungefähre Vorstellung des postulierten Raumes geben kann. Man zeigt ihm, wie aus der Ebene unser gewöhnlicher R_3 entsteht, wenn man sie längs einer zu ihr senkrechten Achse bewegt, und geht induktiv weiter. - Über die physikalische Existenz ist damit nichts gesagt. Der Mathematiker kann ja den R_n als analytischen Raum durch lineare Gleichungssysteme oder durch andere lineare Mannigfaltigkeiten, z.B. projektiver Ebenenbüschel, Kugelbüschel, ...einführen. Aber der Punktraum ist immer noch das Anschaulichste. Vgl. Enzykl.d.math.Wiss. III C 7, S.787, Fußnote 67.

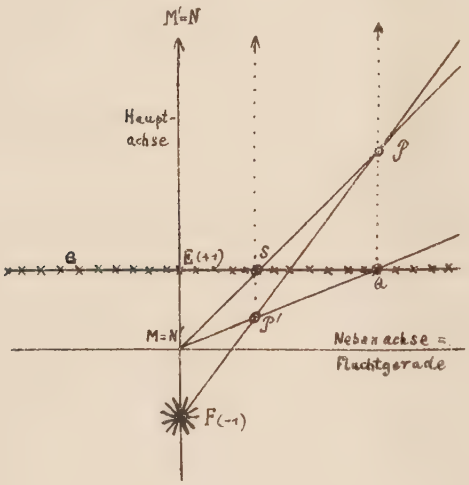
ersten (n-1) Komponenten stets positiv sind, A_{nn} aber positiv oder negativ sein kann; entsprechend wird der Tensor selbst positiv oder negativ genannt.

16.

Bei der Translation, beim Versor und beim Tensor waren die Bilder von uneigentlichen Punkten nur uneigentliche, von eigentlichen nur eigentliche. Die einfachste gewöhnliche Kollineation, die nicht von dieser Art ist, wird dargestellt durch

$$(\xi)\quad \begin{cases} \text{homogen: } X_0' = X_n \;;\; X_\varphi' = X_\varphi \;;\; X_n' = X_0 \\ \text{inhomogen: } X_{\varphi 0}' = \dfrac{X_{\varphi 0}}{X_{n0}} \;;\; X_{n0}' = \dfrac{1}{X_{n0}} \qquad (\varphi = 1,2,\ldots,n-1). \end{cases}$$

Wir nennen sie den "F u g a t o r"[21], der auf die n-te Achse der großen Koordinaten X,X' als "Hauptachse h" und die andern Achsen als "Nebenachsen" bezogen ist.



Figur c.)

Zuerst veranschaulichen wir uns den Fugator des R_2 an Hand von Fig.c). Dem Mittelpunkt M=N' entspricht der unendlich ferne Punkt M'=N von h. Der Nebenachse oder "Fluchtgeraden" entspricht die unendlich ferne Gerade involutorisch. Alle Punkte auf der Geraden e, die durch den positiven Einheitspunkt E von h parallel zur Fluchtgeraden läuft, sind sich selbst homolog, ebenso alle Strahlen durch den negativen Ein-

21) Obwohl ich gegen neue Bezeichnungen eingestellt bin, halte ich doch die Definition dieses Begriffs zum Zweck der klaren Darstellung vorliegender Arbeit für unerläßlich. Naheliegender wären "Inversion" oder "Inversor", sie sind aber zu farblos und vieldeutig. - Bei H. J. St. S m i t h, a.a.O.3), S. 587, werden unsere Nebenachsen "Hauptachsen" und unsere Hauptachse "Fokalachse (focal axe)" genannt. Klarer ist die Bezeichnung von K. K o m m e r e l l, K I 5), S.5: Nebenachsen und Hauptachse, gleichlaufend mit Nebeninvarianten und Hauptvariante.

heitspunkt F. Bei der Konstruktion des Bildpunktes P' von P entsteht die Figur des vollständigen Vierecks SPQP'. Es liegt eine ebene Perspektivität mit dem Zentrum F vor, die zugleich involutorisch ist.

Beim Fugator des R_n werden die Punkte jeder Ebene, die durch die Hauptachse h geht, in der beschriebenen Weise involutorisch gepaart. Alle Punkte der Hyperebene ε_1, die jetzt an die Stelle der Geraden e tritt und in E auf h senkrecht steht ($X_{n0} = 1$), sind Fixpunkte. Die Hyperebene der Nebenachsen, die "Fluchtwand", ist mit der uneigentlichen gepaart.

Jedoch ist der Sinn entsprechender Simplexe verschieden; man betrachte ein Simplex mit n Scheiteln in ε_1 und einem Scheitel P außerhalb. Die Determinante des Fugators ist gleich -1. Für die analytische Darstellung wird der "positive Fugator" praktischer sein, der aus dem beschriebenen dadurch entstehen soll, daß wir nachträglich noch R' an der Fluchtwand spiegeln. Dieser ist immer noch involutorisch, hat aber keine reellen eigentlichen Fixpunkte mehr und kommt daher dem negativen an Anschaulichkeit nicht bei.

Üben wir anschließend an einen positiven Fugator noch einen auf dasselbe Hauptsystem bezogenen Tensor (I) auf R' aus, so erhalten wir die wichtigen Transformationsgleichungen

$$(II)\quad \begin{cases} \text{homogen:} & X_0' = \Lambda_0 X_n \;;\; X_\varrho' = \Lambda_\varrho X_\varrho \;;\; X_n' = -\Lambda_n X_0 \\ \text{inhomogen:} & X_{\varrho 0}' = \dfrac{\Lambda_{\varrho 0} X_{\varrho 0}}{X_{n0}} \;;\; X_{n0}' = \dfrac{-\Lambda_{n0}}{X_{n0}} \end{cases}$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Weil durch den Fugator die n-te Achse eine Ausnahmestellung erhielt, nennen wir jetzt auch die n-te Tensorkomponente Λ_{n0} "Hauptkomponente" zur Unterscheidung von den andern, den "Nebenkomponenten".

17.

Jetzt wollen wir die allgemeinen Kollineationen des R_n nach ihrem Verhalten zum Unendlichfernen einteilen. Von selbst teilen sie sich in zwei Klassen, die sich darin unterscheiden, ob den uneigentlichen Punkten von R wieder nur uneigentliche Punkte entsprechen oder nicht. Der Fall I gibt die "affinen Kollineationen" oder "Affinitäten", der Fall II die "nichtaffinen Kollineationen". Der Fall II ist eigentlich der allgemeine; er liegt immer vor, wenn in (α) nicht zugleich alle a_{0k} (k=1,2,...,n) verschwinden.

Die Affinität ist eine n-fache Bedingung. Es muß

$$a_{01} = a_{02} = \dots = a_{0n} = 0$$

sein. Die Translation, der Versor, die Ähnlichkeit, der Tensor sind spezielle Affinitäten. Wichtig ist der Satz, daß jede affine Kollineation, in der zwei $[n]$-Sphären verwandt sind, eine Ähnlichkeit wird. Denn jene Sphären schneiden die homologen $\bar{\omega}$ und $\bar{\omega}'$ in den absoluten Gebilden, welche deshalb ebenfalls verwandt sein müssen. Jetzt wird jede Sphäre in eine solche abgebildet. Das Verhältnis der Radien ist konstant gleich dem Ähnlichkeitsverhältnis. - Im allgemeinen hat die Affinität im Endlichen einen Fixpunkt, den "Affinitätspol". Ist dieser gerade der Ursprung ($a_{i0}=0$ für $i=1,2,\dots,n$), so wird die Affinität "Affinor" genannt. Der Tensor und Versor sind Affinoren. Durch Vor- oder Nachmultiplizieren mit einer Translation kann jede Affinität leicht zu einem Affinor gemacht werden.

18.

Wir können nun durch Multiplikation unserer Fundamentalkollineationen: Translation, Versor, beide zusammengefaßt als Bewegung, Tensor und Fugator, viel allgemeinere Kollineationen aufbauen. So erhalten wir eine Affinität, wenn wir in einem schon fest gegebenen Koordinatensystem R_n bewegen ($\frac{n(n+1)}{2}$ Parameter), einen Tensor - bezogen auf dieses Koordinatensystem - ausüben (n Parameter), und den entstehenden Raum noch in eine beliebige Lage R_n' bewegen ($\frac{n(n+1)}{2}$ Parameter). Denselben Vorgang können wir auch folgendermaßen schildern: Wir wählen in R ein neues Koordinatensystem als Hauptsystem des Tensors, üben den Tensor aus und bewegen den gedehnten Raum.

Es gilt nun der grundlegende Satz, daß die so entstehende Affinität die allgemeinste ist, d.h. daß jede affine Kollineation durch die eben beschriebene "k a n o n i s c h e E r z e u g u n g" hergestellt werden kann; allerdings nicht auf eindeutige Weise, weil der Mittelpunkt des Tensors ein beliebiger eigentlicher sein kann. Schalten wir vor dem Tensor einen auf dasselbe Hauptsystem bezogenen (positiven) Fugator ein, so haben wir die allgemeinste nichtaffine Kollineation kanonisch erzeugt, und zwar ist diese Darstellung im allgemeinen eindeutig, wenn auf Vorzeichenunterschiede keine Rücksicht genommen wird.

Diese beiden Aussagen bilden den wesentlichen Inhalt vorliegender Arbeit. Würde es uns nicht gerade darauf ankommen, daß alle Elemente reell sind, so könnten hier gruppentheoretische Betrachtungen einspringen. Wir wollen jedoch in § 6 und § 7 beim analytischen Beweis zugleich die Transformationsformeln finden,

in § 8 und § 9 neben dem synthetischen Beweis her einige spezielle metrische Eigenschaften der Kollineation aufzeigen.

Doch geben wir der Klarheit zuliebe schon jetzt die synthetische Fassung des Hauptsatzes:

> Jede gewöhnliche nichtaffine Kollineation wird (im allgemeinen eindeutig) durch einen Fugator, einen Tensor - beide mit demselben beliebigen Hauptsystem - und eine Bewegung erzeugt; jede gewöhnliche affine Kollineation durch einen Tensor und eine Bewegung, aber n-fach unendlich vieldeutig.

Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß zwei Kollineationen äquivalent in unserem Sinne sind, ist demnach die Übereinstimmung ihrer Tensorkomponenten, mit dem Zusatz, daß sie beide zugleich affin oder nichtaffin sein müssen. Die metrischen Eigenschaften einer Kollineation sind in den Tensorkomponenten implizit enthalten. Diese sind invariant dagegen, daß man nur einen der beiden Räume bewegt. Sie sind "metrische (absolute) Invarianten". Denken wir alle äquivalenten Kollineationen durch die eine kanonische (mit zusammenfallenden Hauptsystemen X, X') vertreten, so gibt es n-fach unendlich viele nichtaffine Kollineationen und ebenso viele Affinitäten. Eine Kollineation ist bestimmt durch folgende Angaben: 1.) affin oder nichtaffin; 2.) ihre Invarianten. Beide Daten zusammen geben ihre "Charakteristik". Die Gesamtheit aller Invariantengruppen können wir abbilden in die Punkte eines "charakteristischen Raums" mit den homogenen Koordinaten $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \Lambda_n$ oder den inhomogenen $\Lambda_{10}, \Lambda_{20}, \ldots, \Lambda_{n0}$. Allerdings erfüllen sie nur zwei Hyperoktanten dieses Raumes, weil höchstens Λ_{n0} negativ sein wird. Wir können uns auch einen zweiblättrigen Raum im Sinne Riemanns und der Funktionentheorie denken, mit einem Blatt der Affinitäten und einem für die nichtaffinen Kollineationen (und gewissen Verzweigungsstellen im Unendlichen). Jeder Kollineation entspricht dann in diesem eindeutig ein "charakteristischer Punkt", durch den sie im Sinne unserer metrischen Auffassung bestimmt ist.

§ 6. Analytische Reduktionsmethode für die Affinitäten.

19.

Ohne Gefahr zu laufen, den Boden der Anschauung zu verlieren, können wir jetzt das Problem rein analytisch behandeln. Nur die Termini seien der Sprache der Geometrie entlehnt. Unser Ziel ist also der Beweis des folgenden

Hauptsatzes:

Jede gewöhnliche Affinität

$$(\mathfrak{A}) \qquad x_i' = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\, x_k \qquad (i=0,1,2,\ldots,n)$$

mit reellen Koeffizienten a_{ik}, wobei

$a_{01} = a_{02} = a_{03} = \cdots = a_{0n} = 0$; $a_{00} \neq 0$; $A \neq 0$ ist, läßt sich durch die Bewegungen (1) und (2), Seite 15, in die kanonische Form des Tensors

$$(I) \qquad X_\varrho' = \Lambda_\varrho X_\varrho \qquad (\varrho = 0,1,2,\ldots,n)$$

transformieren. Dabei wird $\prod_{\varrho=0}^{n} \Lambda_\varrho = A = |a_{ik}| \neq 0$.

Nehmen wir die Existenz einer Lösung vorweg, dann folgt der letzte Zusatz sofort aus der Determinantentheorie. Denn (I) ist mit $(\mathfrak{A})$ äquivalent, d.h. aus $(\mathfrak{A})$ durch die umkehrbaren Transformationen (1) und (2) hervorgegangen. Die Determinante A ist also das Produkt der Determinante der Λ_ϱ mit zwei Determinanten vom Werte +1. Die Determinante der Λ_ϱ selbst ist aber gleich dem Produkt der Λ_ϱ.

20.

Für die Affinitäten wäre eigentlich im folgenden die nichthomogene Darstellung angemessener; wir rechnen homogen zum besseren Vergleich mit den nichtaffinen Kollineationen. Für den praktischen Fall wird man $a_{00} = 1$ setzen. In allen folgenden Summenzeichen wird der Summationsindex die Reihe von 1 bis n durchlaufen, die Grenzen sind daher stets weggelassen.

Wir führen in das Gleichungssystem (2), Seite 15, die Werte für X_ϱ' aus (I) und dann die Werte für X_ϱ aus $(\bar{I})$, Seite 16, ein:

$$\begin{aligned} x_i' &= \sum_\varrho \eta_{i\varrho}' X_\varrho' + \eta_{i0}' X_0' \\ &= \sum_\varrho \eta_{i\varrho}' \Lambda_\varrho X_\varrho + \eta_{i0}' \Lambda_0 X_0 \\ &= \sum_{k,\varrho} \eta_{i\varrho}' \Lambda_\varrho \eta_{k\varrho} x_k - \sum_{k,\varrho} \eta_{i\varrho}' \Lambda_\varrho \eta_{k\varrho} m_{k0} x_0 + \eta_{i0}' \Lambda_0 x_0 \\ x_0' &= X_0' = \Lambda_0 X_0 = \Lambda_0 x_0 \end{aligned}$$

und identifizieren mit $(\mathfrak{A})$:

$$(5a)^{22} \qquad a_{ik} = \sum_\varrho \eta_{i\varrho}' \eta_{k\varrho} \Lambda_\varrho \qquad (i,k=1,2,\ldots,n)$$

$$(5b) \qquad a_{i0} = -\sum_{k,\varrho} \eta_{i\varrho}' \eta_{k\varrho} \Lambda_\varrho m_{k0} + \eta_{i0}' \Lambda_0 = -\sum_k a_{ik} m_{k0} + \eta_{i0}' \Lambda_0$$

$$(5c) \qquad a_{0k} = 0$$

$$(5d) \qquad a_{00} = \Lambda_0 \neq 0.$$

---

22) Für n=3 sind dies gerade die Gl. (67) in SFK 5), S.273, wenn statt $\eta_{1\varrho}$; $\eta_{2\varrho}$; $\eta_{3\varrho}$; $\eta_{i\varrho}'$; $\eta_{2\varrho}'$; $\eta_{3\varrho}'$; Λ_ϱ ($\varrho = 1,2,3,$) bzw. l_ϱ; m_ϱ; n_ϱ; l_ϱ', m_ϱ', n_ϱ'; i_ϱ gesetzt wird. Deshalb läßt sich das dort S.274/5 Gesagte fast wörtlich übertragen. Überhaupt ist vorliegende Reduktionsmethode

Die Gl. (5c) zeigen, daß eine nichtaffine Kollineation nicht in die Form (I) gebracht werden kann, was klar ist. Die $(2n^2+n)$ Gl. (5a), zusammen mit den immer wieder vorkommenden Fundamentalrelationen (3ab) und (4ab), Seite 15, enthalten gerade die $(2n^2+n)$ Unbekannten η_{ik}, η'_{ik}; $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$, sodaß im allgemeinen gerade eine Lösung zu erwarten ist, während dann in den n Gl. (5b) im allgemeinen entweder die m_{ko} oder die n'_{io} willkürlich gewählt werden können. Dies ist jetzt genauer auszuführen.

21.

Um zu n o t w e n d i g e n Bedingungen für die Unbekannten zu gelangen, definieren wir

$$(6)\qquad \begin{aligned} b_{ik} &= b_{ki} = \sum_\tau a_{\tau i}\, a_{\tau k} \\ b'_{ik} &= b'_{ki} = \sum_\tau a_{i\tau}\, a_{k\tau} \end{aligned}, \qquad (i,k=1,2,\ldots,n)$$

und erhalten, vorerst nur mit den ungestrichenen b_{ik} rechnend, wegen

$$\begin{aligned} b_{ik} &= \sum_{\varrho\sigma\tau} \eta'_{\tau\varrho}\, \eta_{i\varrho}\, \Lambda_\varrho \cdot \eta'_{\tau\sigma}\, \eta_{k\sigma}\, \Lambda_\sigma \\ &= \sum_{\varrho\sigma} \delta^{\varrho}_{\sigma}\, \eta_{i\varrho}\, \eta_{k\sigma}\, \Lambda_\varrho \Lambda_\sigma \qquad \text{das wichtige System} \end{aligned}$$

$$(7)\qquad b_{ik} = b_{ki} = \sum_\varrho \eta_{i\varrho}\, \eta_{k\varrho}\, \Lambda_\varrho^2 \qquad (i,k=1,2,\ldots,n).$$

Die gestrichenen Kosinus sind jetzt eliminiert. Weiter folgt für jedes i und σ von 1 bis n

$$(8)\qquad \sum_\kappa b_{i\kappa}\, \eta_{k\sigma} = \eta_{i\sigma}\Lambda_\sigma^2 = \sum_\kappa \delta^i_\kappa\, \eta_{k\sigma}\Lambda_\sigma^2 \ .$$

Bei festem σ besteht also für die Reihe der Unbekannten $\eta_{1\sigma}, \eta_{2\sigma}, \eta_{3\sigma}, \ldots, \eta_{n\sigma}$ das homogene Gleichungssystem

$$(9)\qquad \sum_\kappa \left(b_{i\kappa} - \delta^i_\kappa \Lambda_\sigma^2 \right) \eta_{k\sigma} = 0 \qquad (i,\sigma = 1,2,\ldots,n),$$

das nur dann außer der trivialen Lösung, die für Richtungskosinus unbrauchbar ist, Lösungen hat, wenn Λ_σ^2 Wurzel der "Hauptachsengleichung"

$$(10)\qquad D(\Lambda^2) = \begin{vmatrix} b_{11}-\Lambda^2 & b_{12} & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-\Lambda^2 & \cdot & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot & \cdot & b_{nn}-\Lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

ist.

---

22) (Fortsetzung von S.22):
der durch Herrn Prof. K. K o m m e r e l l in der Math.Zeitschr., Bd.10(1921), S.217/30 zuerst veröffentlichten und in seinem Buch SFK 5), a.a.O. wiedergegebenen Methode nachgebildet und durch jene angeregt worden.

In (6) gelangen wir von den Größen b_{ik} zu den b'_{ik}, wenn wir in den a_{ik} die Indizes vertauschen, und folglich in (5a) die γ' mit η. Dadurch ergeben sich ganz analoge Gl. (7'), (8'), (9'), geschrieben in b'_{ik} und η'_{ip}, und besonders die Hauptachsengleichung

$$(10') \qquad D'(\Lambda^2) = \begin{vmatrix} b'_{11}-\Lambda^2 & b'_{12} & \cdot & \cdot & b'_{1n} \\ b'_{21} & b'_{22}-\Lambda^2 & \cdot & \cdot & b'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b'_{n1} & b'_{n2} & \cdot & \cdot & b'_{nn}-\Lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus (5a) folgen noch als weitere notwendige Bedingungen

$$(11) \qquad \sum_{k} a_{ik}\,\eta_{k\sigma} = \eta'_{i\sigma}\Lambda_\sigma \qquad (i,\sigma = 1,2,\ldots,n)$$

$$(11') \qquad \sum_{i} a_{ik}\,\eta'_{i\sigma} = \eta_{k\sigma}\Lambda_\sigma ,$$

die wir bald benützen werden.

22.

Jede Gleichung der Form (10), wo $b_{ik}=b_{ki}$ reelle Koeffizienten sind, trägt den Namen: H a u p t a c h s e n g l e i c h u n g, weil sie bei der Theorie der Flächen 2.O. zur Bestimmung der Hauptachsen dient[23]. Hier führt sie uns zu den Hauptachsen der Affinitäten; den inneren Zusammenhang beider Probleme werden wir später noch besser erkennen. Von ihrer Bedeutung in der Astronomie her heißt sie auch "Säkulargleichung". Von ihr ist einmal bekannt, daß sie stets lauter reelle[24] Wurzeln Λ_σ^2 hat. Weiter

---

23) Vgl. die in Enzykl.d.math.Wiss. III C 2, S.175 und in SFK 5), S.594, Fußnote 30a) angeführte Literatur. - Für den R_∞ tritt sie als Hauptachsengleichung der Hyperflächen anscheinend zuerst auf bei L. S c h l ä f l i, "Theorie der vielfachen Kontinuität", publ.von J.H.Graf, Neue Denkschr.d.allg.Schweizer Gesellschaft 38 (1901). Dort werden in der Flächengleichung alle gemischten Produkte xy,...durch orthogonale Transformationen eliminiert, was im wesentlichen dasselbe ist, was wir für (α) tun. Allerdings ist die Hauptachsengleichung nicht explizit angegeben. - In Verbindung mit den Affinitäten des R_3 tritt die Hauptachsengleichung zuerst auf bei K.K o m m e r e l l, K II 5), S.39, wiederabgedruckt in SFK 5), S.251. Dort geht die Darstellung direkt von den Flächen 2.O. aus u. ist deshalb kürzer.

24) Beweis z.B. in G. K o w a l e w s k i : "Einführung in die Determinantentheorie", 2.Auflage (1925), S.115 ff. - Literatur in Enzykl.d. math. Wiss. III C 2, S.175, Fußnoten 50) bis 52). Ein Beweis ergibt sich auch aus dem Satz in Nr.11. Denn die n-reihige Determinante $|b_{ik}|$ vermittelt eine Kollineation $\mathfrak{K}$, die wegen $b_{ik}=b_{ki}$ als Produkt der Polarsysteme $\sum_i b_{ik}x_i x'_k=0$ und $\sum x_i x'_i=0$ dargestellt werden kann. $\mathfrak{K}$ ist daher eine reguläre Kollineation mit lauter reellen Doppelelementen, also hat ihre Koinzidenzgleichung, eben die Säkulargleichung, lauter reelle Wurzeln.

sagt der Satz von Weierstrass [25], daß, wenn Λ_v^2 eine p-fache Wurzel ist, der Rang von $D(\Lambda_v^2)$ gleich (n-p) ist und umgekehrt. Zu dieser Aussage kam Weierstrass durch Kombination des Satzes, daß es stets eine orthogonale Transformation gibt, welche die quadratische Form $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$ ($a_{ik} = a_{ki}$, reell) in die kanonische Form $\sum_{i=1}^{n} \Lambda_i X_i^2$ transformiert, mit dem Satz, daß der Rang äquivalenter Bilinearformen gleich ist. Den $\frac{n(n-1)}{2}$ Parametern einer orthogonalen Determinante stehen gerade die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen, daß der Faktor von $X_i X_k$ ($i \neq k$) verschwinden soll, gegenüber. Durch dieselbe orthogonale Transformation geht aber die Form $\Lambda_\sigma \sum x_i^2$ in die Form $\Lambda_\sigma \sum X_i^2$ über. Subtraktion gibt, daß die Determinante $|a_{ik} - \delta_{ik} \Lambda_\sigma|$ der Determinante $|\delta_{ik}(\Lambda_i - \Lambda_\sigma)|$ äquivalent und also mit ihr ranggleich ist, d.h. die Multiplizität der Wurzel Λ_σ der Säkulargleichung ist gleich dem Verschwindungsgrad von $|a_{ik} - \delta_{ik} \Lambda_\sigma|$

Wegen der Darstellung durch (6) ist unsere Hauptachsengleichung (10) eine spezielle und hat noch die besondere Eigenschaft, daß keine Wurzel negativ ist. Da nämlich [25] jeder Hauptminor von $B = D(o) = |\delta_{ik}|$ die Summe der Quadrate von Minoren aus A_{oo}, der Unterdeterminante von in A, ist, muß D (z) für negatives z stets positiv sein. Hieraus könnte man übrigens noch schließen, daß (10') dieselben Wurzeln wie (10) besitzt. Dies soll aber im folgenden nicht benützt werden, sondern wird von selbst analytisch aus dem Verlauf der nächsten Nummern folgen.

23.

Die Wurzeln Λ_σ^2 der Hauptachsengleichung $D(\Lambda^2) = o$ sind wegen unserer für die ganze Arbeit geltenden Voraussetzung $A \neq o$ jedenfalls alle nichtverschwindend; denn es ist $D(\sigma) = |\delta_{ik}| = A_{oo}^2 = A^2 : a_{oo}^2$. Wir setzen für den Verlauf dieser Nummer voraus, die W u r z e l n Λ_σ^2 seien voneinander v e r s c h i e d e n und können dann zeigen, daß es, abgesehen von Freiheiten bezüglich der Wahl der Vorzeichen, ein und nur ein Lösungssystem von (9), (10), (11) und (3b), Seite 15, gibt, und daß diese Gleichungen hinreichend sind, d.h. daß aus ihnen wieder (3a), (4ab), (5a), Seite 15, folgen.

Nach Weierstrass hat für jede Wurzel Λ_σ^2 die Koeffizientendeterminante von (9) den Rang (n-1), also folgen aus (9) die Verhältnisse $\gamma_{1\sigma} : \gamma_{2\sigma} : \ldots\ldots : \gamma_{n\sigma}$ eindeutig.

Normieren wir jede der n Kosinusreihen, daß das System (3b), Seite 15, erfüllt wird, so bleibt nur das Vorzeichen offen. Dieses wählen wir (n-1)-mal beliebig, für die letzte Reihe $\gamma_{1\tau} : \gamma_{2\tau} : \ldots\ldots : \gamma_{n\tau}$ aber so, daß $|\gamma_{i\sigma}|$ eine positive Determinante wird. Die Vor-

---

25) Vgl. Beweis von K. K o m m e r e l l in SFK 5), Art.72, B 3.

zeichen der letzten Reihe $\eta'_{1n}, \eta'_{2n}, \ldots, \eta'_{nn}$ wieder so, daß $|\eta'_{i\sigma}|$ positiv wird. Dann bestimmt sich sign Λ_n von selbst[26].

Rückwärts folgt nun aus (9)' wieder (8) und daraus

$$\Lambda_\sigma^2 \cdot \sum_i \eta_{i\sigma}\eta_{i\tau} = \sum_{i\kappa} b_{i\kappa}\,\eta_{\kappa\sigma}\,\eta_{i\tau} = \Lambda_\tau^2 \sum_\kappa \eta_{\kappa\tau}\,\eta_{\kappa\sigma} \qquad (\sigma,\tau = 1,2,\ldots,n),$$

d.h. für $\sigma \neq \tau$ das System (3a)*[27]. Damit gelten auch die Gl.(3ab), die wir sofort gebrauchen. Wir schließen nämlich weiter mit Benutzung von Gl. (11), Seite 24

$$\sum_i \eta'_{i\varrho}\Lambda_\varrho \cdot \eta_{k\varrho} = \sum_{\varrho,\tau} a_{i\tau}\,\eta_{\tau\varrho}\,\eta_{k\varrho} = \sum_\tau \delta_k^\tau\, a_{i\tau} = a_{ik} \qquad (i,k=1,2,\ldots,n)$$

und

$$\sum_i \eta_{i\sigma}\Lambda_\sigma \cdot \eta'_{i\varrho}\Lambda_\varrho = \sum_{i,\tau,\chi} a_{i\tau}\,\eta_{\tau\sigma} \cdot a_{i\chi}\,\eta_{\chi\varrho} = \sum_{\tau,\chi} b_{\tau\chi}\,\eta_{\tau\sigma}\,\eta_{\chi\varrho} = \sum_\tau \eta_{\tau\varrho}\Lambda_\varrho^2 \cdot \eta_{\tau\sigma} = \delta_\sigma^\varrho\,\Lambda_\varrho^2 \qquad (\varrho,\sigma = 1,2,\ldots,n),$$

und erhalten die Gl. (5a) und (4ab). Die Determinanten $|\eta_{i\varrho}|, |\eta'_{i\varrho}|$ bilden orthogonale Determinanten, da sie soeben positiv gemacht wurden und ihre Quadrate gleich 1 sind.

24.

Seien auch m e h r f a c h e W u r z e l n vorhanden, so existieren unendlich viele Lösungen, weil nach Weierstrass der Rang der Gleichungsmatrix in (9) vermindert wird. Nehmen wir an, es liegen Gruppen von p_1, p_2, ..., p_ϱ, ..., p_q gleichen Wurzeln Λ_1^2, $\Lambda_2^2, \ldots, \Lambda_\varrho^2, \ldots, \Lambda_q^2$ vor, wo $\sum_{\varrho=1}^{q} p_\varrho = n$ ist. Jede der zu Λ_ϱ^2 gehörigen p_ϱ Reihen von Unbekannten $\eta_{k\varrho}$ ist in (9) p_ϱ-fach, also mit der normierenden Gleichung (3b) zusammen $(p_\varrho - 1)$-fach unbestimmt, sodaß das System der p_ϱ Reihen insgesamt $p_\varrho \cdot (p_\varrho - 1)$-fach unbestimmt wäre, wenn nicht folgender Gesichtspunkt neu hinzukommen würde: Von den Orthogonalitätsbedingungen (3a) folgen bei der

---

26) nämlich für gerades n gleich sign A und für ungerades n gleich sign $A_{\infty\infty}$ wegen $A = \prod \Lambda_\nu = a_{\infty\infty}A_{\infty\infty}$. Dann wird sign $(\Lambda_n : \Lambda_\sigma)$ für gerades n gleich sign $A_{\infty\infty}$ und für ungerades n gleich sign A, d.h. in beiden Fällen unabhängig davon, daß jedes Element in A entgegengesetztes Vorzeichen erhält, wie es sein muß.

27) An dieser Stelle folgt von selbst, daß jede Wurzel von (10) reell ist. Denn wäre Λ_σ^2 komplex, Λ_τ^2 ihre konjugiert-komplexe, so könnten $\eta_{k\tau}$ die konjugiert-komplexen zu $\eta_{k\sigma}$ sein. Dann wäre aber kein Produkt $\eta_{k\sigma}\eta_{k\tau}$ negativ, und da mindestens ein Produkt wegen (3b) nicht verschwindet, ergäbe sich ein Widerspruch zu dem eben abgeleiteten System (3a).

in der vorigen Nummer gegebenen Rechnung nur noch diejenigen aus (9), deren Richtungskosinus zu verschiedenen Gruppen gehören. Die übrigen müssen zur Konstruktion mitbenützt werden. Die Forderung, daß die übrigen p Richtungen paarweise orthogonal sind, wird durch $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ solcher Gleichungen (3a) ausgedrückt. Um diese Zahl vermindert sich der erwartete Freiheitsgrad, sodaß die Mannigfaltigkeit der möglichen orthogonalen Determinanten $|\eta_{\kappa\sigma}|$ gleich $\sum_{i=1}^{3} \frac{p_i(p_i-1)}{2}$ wird. Die geometrische Deutung werden wir noch in Nr.36 sehen. Zu jeder Determinante $|\eta_{\kappa\sigma}|$ erhalten wir aus (11) entsprechend dem Weg der vorigen Nummer eindeutig die zugehörige Determinante $|\eta'_{\kappa\sigma}|$. Die Herleitung der Gleichungen (5a) und (4ab) bleibt ungeändert bestehen.

Wir sahen eben, daß immer beim Vorliegen einer p-fachen Wurzel der Hauptachsengleichung infolge des Satzes von Weierstrass die Mannigfaltigkeit der möglichen Hauptsysteme um $\frac{p(p-1)}{2}$ wächst. Derselbe Satz bewirkt aber auch, daß die Anzahl der Bedingungen für das Auftreten einer p-fachen Wurzel um dieselbe Zahl zunimmt. Denn die Forderung, daß z eine p-fache Wurzel von (10) sei, wird nicht durch p Gleichungen zwischen den Elementen $b_{i\kappa}$, also zwischen $a_{i\kappa}$ ausgedrückt, sondern durch $\frac{p(p+1)}{2}$ Gleichungen. Beim Beweis gehen wir davon aus, daß der Rang der symmetrischen Determinante D(z) gleich $(n-p)$ sein muß. Diese hat also einen $(n-p)$-reihigen Hauptminor H, der von Null verschieden ist[28]. Nach einem Satz von K r o n e c k e r [29] ist es nun notwendig und hinreichend, die Bedingungen aufzustellen, daß alle $(n-p+1)$-reihigen Determinanten in D(z) mit dem Kerne H verschwinden. Wir haben demnach den Hauptminor H mit den Elementen vor irgend einer der p übrigen Spalten und einer der p übrigen Zeilen von D(z) zu rändern und jede der erhaltenen Determinanten gleich Null zu setzen. Dabei wird wegen der Symmetrie von D(z) jede geränderte Determinante zweimal auftreten, außer den p Hauptminoren, die sich selbst symmetrisch sind. Die Bedingungsgleichungen hier anzuschreiben, wäre zu umständlich. Aber ihre Anzahl läßt sich nach diesen Ausführungen bestimmen zu $\frac{p^2-p}{2} + p = \frac{p(p+1)}{2}$, wie oben behauptet wurde. Lassen wir die Angabe des Wertes z weg, so folgt:

> Die Bedingung, daß die Hauptachsengleichung eine p-fache Wurzel habe, läßt sich durch $\left(\frac{p(p+1)}{2}-1\right)$ Gleichungen zwischen den Elementen der Kollineations-Determinante darstellen[30].

---

28) G. K o w a l e w s k i, a.a.O.24), Satz 35, S.111.
29) SFK 5), S.587.
30) Daher kommt es z.B. daß im R_3 die Bedingung für rotatorische Räume zwei-fach ist. Vgl.die Bemerkung in SFK 5), S.247/48 u. die Bedingungen für Rotationsflächen ebenda: Art.92, S.166.
(Fortsetzung der Fußnote s. S.28.)

25.

Nun bleibt noch die Bestimmung der Unbekannten m_{k0}, n'_{i0} übrig, d.h. der nichthomogenen Koordinaten der M i t t e l p u n k t e. Die Gleichungen (5b) geben zusammen mit (5d):

$$n'_{i0} = \frac{a_{i0} + \sum_k a_{ik} m_{k0}}{a_{00}} \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Wählen wir m_{k0} beliebig, so finden wir die n'_{i0} eindeutig, nämlich gerade die nichthomogenen Koordinaten des in der Affinität (α) entsprechenden Punktes, wie es sein muß. Es können also irgend zwei entsprechende, eigentliche Punkte als Mittelpunkte gelten. Umgekehrt können die n'_{i0} nur dann beliebig gewählt werden, wenn $A_{00} \neq \sigma$ ist, bei den gewöhnlichen Affinitäten.

Im allgemeinen können wir eine Lösung mit $m_{k0} = n'_{k0}$, nämlich aus

$$\sum_k \left(a_{ik} - \delta^i_k a_{00} \right) m_{k0} = - a_{i0} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

finden. Die Mittelpunkte der Hauptsysteme fallen dann zusammen im **Affinitätspol** (Nr.17). Für $a_{i0} \equiv 0$ ist der Ursprung des alten Koordinatensystems bereits der Affinitätspol und die Affinität ist ein Affinor.

26.

Ein Affinor ist ein reiner Versor (Nr.13) um den Ursprung, wenn $\frac{a_{ik}}{a_{00}}$ (i,k = 1,2,...,n) Elemente einer orthogonalen Determinante mit dem Werte +1 sind. In (6) wird $\varepsilon_{ik} = \delta^i_k a^2_{00}$ und in (10) werden alle Wurzeln gleich a^2_{00}. Die Determinante $|\eta_{k\sigma}|$ ist $\frac{n(n-1)}{2}$-fach unbestimmt und kann jede beliebige orthogonale sein, am einfachsten: $\eta_{k\sigma} = \delta^k_\sigma$. Für diese folgt aus (11) sofort die zugehörige: $\eta'_{i\sigma} = \frac{a_{i\sigma}}{a_{00}}$.

Ein reiner Tensor (Nr.15) liegt dann und nur dann vor, wenn ein System $\eta'_{ip} \equiv \eta_{ip}$ die notwendigen und hinreichenden Gleichungen erfüllt. Jedenfalls haben wir einen Tensor dann, wenn A_{00} symmetrisch ist, weil dann die Hauptachsenprobleme (9) und (9') identisch sind. Das Produkt der Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\Lambda & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\Lambda & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn}+\Lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}-\Lambda & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\Lambda & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn}-\Lambda \end{vmatrix}$$

---

30) (Fortsetzung von S.27.)
H. J. St. S m i t h, a.a.O.3), betont in seiner historischen Note am Schluß, S.602, ausdrücklich, daß die Gleichheit seiner "Parameter A und B", (unserer Tensorkomponenten $A_1 : A_0$; $A_2 : A_0$) zwei Gleichungen äquivalent sei. Er zeigt dies einfach dadurch, daß die rotatorischen Räume in perspektivische Lage gebracht werden können und die Kollineation von 15, die Perspektivität von 7 und die Bewegung von 6 Konstanten abhänge. Der Satz von Weierstrass ist also die Verallgemeinerung.

gibt bei Entwicklung nach Spalten $D(\Lambda^2)$, nach Zeilen $D'(\Lambda^2)$. Die Richtungskosinus erhält man jetzt am schnellsten aus

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik} - \delta_k^i \Lambda_\sigma \right) \eta_{k\sigma} = 0 \qquad (i, \sigma = 1,2,\ldots,n).$$

Die Bedingung der Symmetrie von $A_{..}$ ist aber auch notwendig. Denn aus der Existenz eines Lösungssystems: $\eta_{ip} \equiv \eta'_{ip}$ schließen wir in (5a), Seite 22,

$$a_{ik} = \sum_p \eta'_{ip} \eta_{kp} \Lambda_p = \sum_p \eta_{ip} \eta'_{kp} \Lambda_p = a_{ki} \qquad (i,k=1,2,\ldots,n).$$

Soll dieser reine Tensor zugleich reiner Versor sein, so zeigt uns (5a):

$$a_{ik} = \sum_p \eta_{ip} \eta_{kp} a_{oo} = \delta_k^i a_{oo},$$

daß er die Identität sein muß (Nr.6).

Zusammenfassend erhalten wir, wenn wir die Gültigkeit der Ausdehnung der letzten Kriterien vom Affinor zur Affinität, von A_{oo} zu **A** richtig bemerkt haben, den

Satz:[31] Die Affinität $\mathfrak{A}$ (mit $a_{ok} = 0$, $a_{oo} \neq 0$) ist dann und nur dann

a) ein reiner Tensor, wenn A symmetrisch zur Hauptdiagonale ist,

b) ein reiner Versor, wenn Division jeden Elementes in A durch a_{oo} eine orthogonale Determinante +1 entstehen läßt,

c) eine reine Translation, wenn $a_{ik} = \delta_k^i a_{oo}$ (i,k=1,2,..,n) und schließlich

d) die Identität für $a_{ik} = \delta_k^i a_{oo}$ (i,k = 0,1,2,..,n), d.h. wenn sie zwei Eigenschaften der unter a),b),c) genannten zugleich hat.

§ 7. Analytische Reduktionsmethode für die nichtaffinen Kollineationen.

27.

Ganz entsprechend dem Gedankengang des § 6 suchen wir jetzt unter der Voraussetzung, daß die Kollineation $(\mathfrak{A})$ eine gewöhnliche und nichtaffin sei, die Formeln für die Reduktion auf die einfache kanonische Form (II) zu gewinnen und damit den analytischen Beweis des

---

31) Vgl. K. K o m m e r e l l, K II 5), S.46/47.

Hauptsatzes:

Jede gewöhnliche nichtaffine Kollineation

$$(\alpha) \qquad x_i' = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i=0,1,2,\ldots,n)$$

mit reellen Koeffizienten a_{ik}, wobei ihre Determinante A und mindestens eins der Elemente $a_{01}, a_{02}, \ldots, a_{0n}$ von Null verschieden sind, läßt sich durch die Bewegungen (1) und (2), Seite 15, in die kanonische Form

$$(II) \qquad X_0' = \Lambda_0 X_n \; ; \; X_\varrho' = \Lambda_\varrho X_\varrho \; ; \; X_n' = -\Lambda_n X_0 \quad (\varrho = 1,2,\ldots,n-1)$$

transformieren. Dabei wird $\prod_{m=0}^{n} \Lambda_m = A = |a_{ik}|$.

Der letzte Zusatz folgt - die Existenz einer Lösung vorausgesetzt - ganz wie in Nr.19, da durch die Minuszeichen bei Λ_n die Determinante von (II) wieder übereinstimmend mit dem Produkt aller Λ_m gemacht wurde.

28.

Wir setzen, analog der Rechnung der Nr.20, in das Gleichungssystem (2), Seite 15, für X_0', X_ϱ', X_n' die Werte aus (II) ein und erhalten wieder mit Benutzung von (I), Seite 16, die homogenen Koordinaten x_i' als lineare Kombinationen der x_k dargestellt. Dabei müssen wir bei jeder Summation unsere Aufmerksamkeit darauf richten, ob der Index sich von 1 bis n oder nur bis $(n-1)$ erstreckt. Dies erleichtern wir uns dadurch, daß wir konsequent bei der Summation bis n die Indizes i, κ, τ verwenden und bei der Summation bis $(n-1)$ die Indizes ϱ, σ, ψ. Vergleichen wir wieder die Koeffizienten des Gleichungssystems mit (α), so folgt:

$$(13a) \qquad a_{ik} = \sum_{\varrho=1}^{n-1} \eta_{i\varrho}' \eta_{k\varrho} \Lambda_\varrho + x_{i0}' \Lambda_0 \eta_{kn} = \sum_{\varrho=1}^{n-1} \eta_{i\varrho}' \eta_{k\varrho} \Lambda_\varrho + x_{i0}' a_{0k}$$

$$(13b) \qquad a_{i0} = -\sum_{\varrho=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{n} \eta_{i\varrho}' \eta_{k\varrho} \Lambda_\varrho m_{k0} - x_{i0}' \Lambda_0 \sum_{k=1}^{n} \eta_{kn} m_{k0} - \eta_{in}' \Lambda_n = -\sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{k0} - \eta_{in}' \Lambda_n$$

$$(13c) \qquad a_{0k} = \Lambda_0 \eta_{kn} \qquad (i,k=1,2,\ldots,n)$$

$$(13d) \qquad a_{00} = -\Lambda_0 \sum_{k=1}^{n} \eta_{kn} m_{k0} = -\sum_{k=1}^{n} a_{0k} m_{k0}$$

Man sieht, daß eine gewöhnliche affine Kollineation nicht in die kanonische Form (II) kommen kann, weil die η_{kn} nicht alle Null sein dürfen und aus $a_{0k}=0$ somit $a_{00}=0$ und $A=0$ folgen würden.

Die Zahl der Unbekannten $\eta_{k\varrho}; \eta_{i\varrho}'; \Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n; x_{i0}'; m_{k0}$ ist gleich $n^2 + n^2 + (n+1) + n + n$. Diesen stehen die $\left[n^2 + n + n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\right]$ Gl. (13abcd), (3), (4) gegenüber. Da beide Anzahlen

übereinstimmen, werden wir eindeutig eine Lösung erwarten dürfen, besonders also nur je einen Mittelpunkt in R und R'.

29.

Die Bestimmung der Unbekannten $\Lambda_0, \eta_{k\nu}, x'_{i0}$ können wir vorweg nehmen. Denn die letzte Gleichung aus (3b) für $\rho = \sigma = \nu$ führt uns mit (13c) direkt zu

$$\Lambda_0 = + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{0k}^2} > \sigma \,, \tag{14}$$

$$\eta_{k\nu} = \frac{a_{0k}}{\Lambda_0} \qquad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{15}$$

und wenn wir noch (13a) hinzufügen, zu :

$$x'_{i0} = \frac{\sum_{\tau=1}^{n} a_{i\tau}\eta_{\tau\nu}}{\Lambda_0} = \frac{\sum_{\tau=1}^{n} a_{i\tau} a_{0\tau}}{\Lambda_0^2} \quad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{16}$$

Ein Teil der Orthogonalitätsbedingungen lautet jetzt

$$\sum_{k=1}^{n} a_{0k}\eta_{k\sigma} = \sigma \qquad (\sigma = 1,2,\ldots,n-1). \tag{17}$$

Größere Schwierigkeit machen die Unbekannten $\Lambda_\nu, \eta'_{i\nu}, m_{k0}$. Die Gl. (13b) und (13d) besagen nur, daß der Mittelpunkt in R_ν ($1, m_{10}, \ldots\ldots, m_{\nu-1,0}, m_{\nu 0}$) durch $\mathfrak{A}$ in den unendlichfernen (σ ; $\eta'_{1\nu}, \ldots\ldots, \eta'_{\nu-1,\nu}, \eta'_{\nu\nu}$) übergeht, was auch aus (II) folgt. Daß diese Gleichungen (13bd) nicht alles Wesentliche zur Bestimmung der genannten $(2n+1)$ Unbekannten enthalten, folgt übrigens schon aus ihrer geringeren Anzahl. Jedoch, weil $A \neq 0$ vorausgesetzt wird, sind sicher auch alle Λ_ν von Null verschieden, sodaß wir die Transformation ($\mathfrak{A}$) in

$$(\mathfrak{A}^{-1}) \qquad x_i = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{ki}}{A} x'_k \qquad (i=0,1,2,\ldots,n)$$

und die kanonische Form (II) in

$$(\mathrm{II}^{-1}) \qquad X_\rho = \frac{X'_\rho}{\Lambda_\rho} \;;\; X_0 = -\frac{1}{\Lambda_\nu} X'_\nu \;;\; X_\nu = \frac{1}{\Lambda_0} X'_0$$

umkehren können. Dabei ist A_{ki} die Unterdeterminante des Elements a_{ki} in A. Dann lassen wir R und R' ihre Rollen vertauschen und kommen wie eben auf:

$$\frac{1}{\Lambda_\nu^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{k0}^2}{A^2} \,, \tag{18}$$

$$\eta'_{i\nu} = \frac{-A_{i0}\Lambda_\nu}{A} \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{19}$$

(20) $$m_{ko} = \Lambda_m^2 \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{A_{\tau k} A_{\tau o}}{A^2} \qquad (k=1,2,\ldots,n) \text{ und}$$

(21) $$\sum_{i=1}^{\infty} A_{io}\, \eta'_{i\sigma} = \sigma \qquad (\sigma = 1,2,\ldots,n-1).$$

30.

Nun führen wir wieder durch (6) die Größen b_{ik}, b'_{ik} ein und erhalten in (13a) nach leichten Rechnungen

$$b_{ik} = b_{ki} = \sum_{\tau=1}^{\infty} a_{\tau i}\, a_{\tau k}$$

$$= \sum_{\rho=1}^{n-1} \eta_{i\rho}\, \eta_{k\rho}\, \Lambda_\rho^2 + \Lambda_o^2\, \eta_{in}\, \eta_{kn} \sum_{\tau=1}^{\infty} n'^2_{\tau o}$$

$$+ \Lambda_o \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{\tau=1}^{\infty} \eta'_{\tau\rho}\, n'_{\tau o}\, \Lambda_\rho \left(\eta_{i\rho}\, \eta_{kn} + \eta_{k\rho}\, \eta_{in}\right)$$

und schließlich:

(22) $$\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}\, \eta_{k\sigma} = \eta_{i\sigma} \Lambda_\sigma^2 + \Lambda_o \Lambda_\sigma\, \eta_{in} \sum_{\tau=1}^{\infty} \eta'_{\tau\sigma}\, n'_{\tau o}$$

$$= \eta_{i\sigma} \Lambda_\sigma^2 + a_{oi}\, \Lambda_\sigma\, f(\sigma)$$

$$(i = 1,2,\ldots,n)$$
$$(\sigma = 1,2,\ldots,n-1),$$

wo $f(\sigma)$ Abkürzung für die letzte Summe ist und sich nur mit σ, nicht mit i ändert. Für jedes feste σ aus der Reihe $1,2,..,n-1$ bilden (22) mit der einen Gleichung aus (17) ein System von $(n+1)$ homogenen linearen Gleichungen in den Unbekannten $\eta_{1\sigma}, \eta_{2\sigma}, \ldots, \eta_{n\sigma}$, $\Lambda_\sigma f(\sigma)$, die nicht alle verschwinden dürfen. Daraus folgt - analog der Hauptachsengleichung (10) bei den Affinitäten - als notwendige Bedingung für die $(n-1)$ Unbekannten Λ_σ^2 die Gleichung $(n-1)$-ten Grades in Λ^2:

(23) $$E(\Lambda^2) = \begin{vmatrix} b_{11}-\Lambda^2 & b_{12} & \cdots & b_{1n} & a_{o1} \\ b_{21} & b_{22}-\Lambda^2 & \cdots & b_{2n} & a_{o2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}-\Lambda^2 & a_{on} \\ a_{o1} & a_{o2} & \cdots & a_{on} & \sigma \end{vmatrix} = \sigma .$$

die wir "N e b e n a c h s e n g l e i c h u n g 1. Art" [32] nennen wollen.

Es ist zu betonen, daß - hauptsächlich infolge des störenden Zusatzgliedes in (13a) - die vorhergehenden Gleichungen nicht direkt auf die gestrichenen Größen b'_{ik}, $\eta'_{k\sigma}$ umgeschrieben werden können. Der Vollständigkeit halber seien hier die Gleichungen

$$b'_{ik} = b'_{ki} = \sum_{\tau=1}^{n} a_{i\tau}\, a_{k\tau} \qquad (i,k = 1,2,\ldots,n)$$

und

$$= \sum_{\tau=1}^{n-1} \eta'_{i\tau}\, \eta'_{k\tau}\, \Lambda_\tau^2 + n'_{i_0}\, n'_{k_0}\, \Lambda_0^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} b'_{ik}\, \eta'_{k\sigma} = \eta'_{i\sigma}\, \Lambda_\sigma^2 + \Lambda_0^2\, n'_{i_0}\, f(\sigma) \qquad \begin{matrix} (\,i\ = 1,2,\ldots,n) \\ (\,\sigma\ = 1,2,\ldots,n-1) \end{matrix}$$

angegeben, denen aber keine Beachtung mehr geschenkt werden wird. Von großer Bedeutung dagegen sind die aus (13a) hervorgehenden n o t w e n d i g e n B e d i n g u n g e n :

$$\left.\begin{aligned}
&(24) \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \eta_{k\sigma} = \eta'_{i\sigma}\, \Lambda_\sigma \\
&(25) \quad \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ik} - a_{ok}\, n'_{i_0}\right) \eta'_{i\sigma} = \eta_{k\sigma}\, \Lambda_\sigma \\
&(26) \quad \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ik} - a_{ok}\, n'_{i_0}\right) \eta'_{iw} = \sigma .
\end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} (i,k = 1,2,\ldots,n) \\ (\,\sigma\ = 1,2,\ldots,n-1) \end{matrix}$$

31.

Die Nebenachsengleichung 1.Art führt wohl bei der praktischen Berechnung am einfachsten zu den Invarianten, ist aber theoretisch noch unbefriedigend, da wir jetzt von neuem beweisen müßten, daß

32) da ihre Wurzeln, radiziert und durch Λ_0 dividiert, die Nebenkomponenten (Nr.16) A_{σ_0} geben, und sie uns Zugang zu den Richtungskosinus der Nebenachsen verschafft. Der Zusatz "1.Art" erklärt sich später, wenn wir eine neue Form, die Nebenachsengleichung 2.Art, bringen. Wir könnten sie auch Schnittachsengleichung nennen, weil sie bei der Berechnung der Achsen einer [n-1]-Fläche 2.O., in der eine Hyperfläche 2.O. von einer Hyperebene geschnitten wird, auftritt. - Für den R_3 vgl. SFK 5), S.144, Gl.(IX) und S.247, Gl. (VIII), bzw. K. K o m m e r e l l, K I 5), S.23, Gl. (70). Die dort stehenden λ_1, λ_2 sind unsere Λ_1^2, Λ_2^2; setzen wir weiter $\alpha = \Lambda_1 : \Lambda_0$; $\beta = \Lambda_2 : \Lambda_0$; $\gamma = -\Delta_0 : \Lambda_0$, so erhalten wir gerade die Gl. (XVII), S.250, bzw.(79), S.27, a.a.O. und andere.

ihre (n-1) Wurzeln alle reell – nichtnegativ sind, und daß ein dem Satz von Weierstrass analoger gilt. Unwillkürlich drängt sich uns die Frage auf, ob diese (n-1) Wurzeln nicht als Wurzeln einer (n-1)-reihigen Säkulargleichung aufgezeigt werden können. Dies wird nun im folgenden nicht genau der Fall sein, sondern wir werden eine Säkulargleichung n-ten Grades erhalten, die für die (n-1) Wurzeln Λ_σ^2 von (23) und außerdem noch für $\Lambda^2=\sigma$ erfüllt sein wird. Diese werden wir "N e b e n a c h s e n g l e i c h u n g 2.Art" nennen. Die Natürlichkeit, mit der wir zur Nebenachsengleichung 2.Art geführt werden, gibt uns Anlaß zu vermuten, daß diese die einfachste Lösung des eben aufgeworfenen Problems ist.

Die Betrachtung von (13a) und (25) legt die Einführung der Abkürzungen

$$(27)\qquad c_{\tau i} = a_{\tau i} - a_{oi}\, n'_{\tau o} = \sum_{\varrho=1}^{n-1} \eta'_{\tau\varrho}\, \eta_{i\varrho}\, \Lambda_\varrho \qquad (i,\tau = 1,2,\ldots,n)$$

und

$$(28)\qquad d_{ik} = d_{ki} = \sum_{\tau=1}^{n} c_{\tau i}\, c_{\tau k} = \sum_{\varrho=1}^{n-1} \eta_{i\varrho}\, \eta_{k\varrho}\, \Lambda_\varrho^2 \qquad (i,k = 1,2,\ldots,n)$$

$$(28')\qquad d'_{ik} = d'_{ki} = \sum_{\tau=1}^{n} c_{\tau i}\, c_{k\tau} = \sum_{\varrho=1}^{n-1} \eta'_{i\varrho}\, \eta'_{k\varrho}\, \Lambda_\varrho^2$$

nahe. Die bekannten Schlüsse mit Hilfe der Fundamentalrelationen (3ab) führen von (28) zu

$$(29)\qquad \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\, \eta_{k\sigma} = \eta_{i\sigma}\, \Lambda_\sigma^2 \qquad \begin{matrix}(i = 1,2,\ldots,n)\\ (\sigma = 1,2,\ldots,n-1)\end{matrix}$$

und, da stets $\varrho \neq n$ ist, zu

$$(30)\qquad \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\, \eta_{kn} = 0.$$

Übrigens gilt schon für $c_{\tau i}$ das (3a) entsprechende System

$$(31)\qquad \sum_{i=1}^{n} c_{\tau i}\, \eta_{in} = 0 \qquad (\tau = 1,2,\ldots,n),$$

wie aus der Summendarstellung von $c_{\tau i}$ in (27) ersichtlich ist. Da (29), bzw. (30) und (31) je homogene Gleichungssysteme für die sicher nicht alle verschwindenden Unbekannten $\eta_{k\sigma}$, η_{kn} sind, muß Λ_σ^2 Wurzel der "Nebenachsengleichung 2.Art"[33] sein.

---

33) Diese Darstellung scheint neu zu sein. Im Prinzip tritt die Nebenachsengleichung 2.Art zuerst bei L. S c h l ä f l i , a.a.O.23), S.155, auf, aber zur Bestimmung der Hauptachsen eines diametralen Schnitts und nicht in Determinantenform.

(32) $$F(\Lambda^2) = \left| a_{ik} - \delta_{ik}\Lambda^2 \right| = 0$$

sein, bzw. muß gelten

(33) $$F(0) = \left| a_{ik} \right| = \left| c_{ik} \right|^2 = 0 .$$

Eine Wurzel in (32) ist demnach die Null. Nach Nr.22 sind alle Wurzeln reell und nichtnegativ. Aus den Gl.(28') können wir ebenso eine entsprechende Nebenachsengleichung 2.Art

(31') $$F'(\Lambda^2) = \left| a'_{ik} - \delta_{ik}\Lambda^2 \right| = 0$$ ableiten.

32.

Jetzt wäre zu zeigen, daß die abgeleiteten notwendigen Bedingungen eine reelle Lösung zulassen und welche von ihnen h i n r e i c h e n d sind. Der Kürze halber unterdrücken wir die weitläufige Rechnung und deuten den Weg kurz an. Wir berechnen die (n-1) Wurzeln Λ_σ^2 aus (23) und nehmen jedes Λ_σ positiv entsprechend dem positiven Λ_0 in (14); damit werden auch $\Lambda_{\sigma 0} = \Lambda_\sigma : \Lambda_0$ positiv. Wenn wir nun im weiteren Verlauf der Rechnung nur erreichen, daß die Determinanten der beiden Systeme von Richtungskosinus positiv werden, so wird dadurch von selbst wegen

(34) $$A = \Lambda_0 \Lambda_1 \cdots \Lambda_n$$

nach Nr.27 das Vorzeichen von Λ_n, das in (18) noch unbestimmt bleibt, mit dem Vorzeichen von A übereinstimmen. Dies ist leicht möglich. Während die letzte Reihe η_{kn} der einen Determinante aus (15) eindeutig hervorgeht, kann das Vorzeichen jeder Reihe $\eta_{k\sigma}$ bei der Berechnung aus dem homogenen System (22) zusammen mit (17) - oder ebensogut aus dem System (29) - und den normierenden Gleichungen (3b) beliebig gewählt werden. Von Vorzeichen abgesehen, ist im Falle verschiedener Wurzeln Λ_σ die Berechnung eindeutig. Bei mehrfachen Wurzeln sind wieder, ganz wie dies bei den Affinitäten (Nr.24) geschah, die zugehörigen Orthogonalitätsrelationen (3a) hinzuzunehmen, und es treten wieder die entsprechenden Mannigfaltigkeiten möglicher Determinanten auf. Schließlich bestimmt sich die zweite Determinante von Richtungskosinus des Hauptsystems in R' aus der ersten eindeutig in (24) und (19), wo sie durch Wahl des Vorzeichens von Λ_n positiv gemacht werden kann. Jetzt können wir zeigen, daß die benützten Gleichungen hinreichend sind, etwa so wie in Nr.23, nur etwas umständlicher, und zwar unter mehrmaliger Berücksichtigung von (17). Dabei benützen wir aber nie als Voraussetzung die Realität der Wurzeln von (23)

und aller später berechneten Größen; sondern diese folgt erst nachträglich, wie in Fußnote 27) oder mit Hilfe der Nebenachsengleichung 2.Art.

Interessanter sind die Determinantensätze, die sich hier anschließen. Die Nebenachsengleichung 2.Art hat dieselben (n-1) Wurzeln Λ_σ^2 wie diejenige 1.Art und dazu noch die einfache Wurzel $\Lambda^2 = 0$. Folglich können sich $\Lambda^2 E(\Lambda^2)$ und $F(\Lambda^2)$ höchstens um einen konstanten Faktor unterscheiden. Da nun der Faktor der höchsten Potenz $(-\Lambda^2)^{n-1}$ in $E(\Lambda^2)$ nach (14) gleich $-\Lambda_0^2$ ist und der Faktor von $(-\Lambda^2)^n$ in $F(\Lambda^2)$ gleich 1, so gilt:

$$(35) \qquad \Lambda_0^2 F(\Lambda^2) = \Lambda^2 E(\Lambda^2) = \Lambda_0^2 \Lambda^2 \prod_{\sigma=1}^{n-1} (\Lambda_\sigma^2 - \Lambda^2) .$$

Auch folgt für das Absolutglied der Potenzreihenentwicklung von $E(\Lambda^2)$:

$$(36) \qquad E(\sigma) = \Lambda_0^2 \prod_{\sigma=1}^{n-1} \Lambda_\sigma^2$$

und schließlich mit Beachtung von (34) und (18):

$$(37) \qquad E(\sigma) = -\sum_{k=1}^{n} A_{k0}^2 . \qquad 34)$$

Man beobachtet auch, daß in dem Falle $\Lambda_0 = \Lambda_n = \sigma$, der allerdings einer singulären Kollineation entspricht (Nr.4) und in dem die beiden kanonischen Formen (I) und (II) identisch sind, die Nebenachsengleichung 2.Art wegen $a_{0\kappa} \equiv \sigma$; $c_{\tau i} = a_{\tau i}$ und $d_{i\kappa} \equiv b_{i\kappa}$ mit der Hauptachsengleichung (10) für die Affinitäten übereinstimmt.

33.

Schließlich interessieren uns noch die B e d i n g u n g e n, unter denen eine Kollineation ein reiner F u g a t o r ist. Dazu müssen erstens die Mittelpunkte M und M' zusammenfallen. Die n Bedingungsgleichungen entnehme man (16) und (20); (hier ist ja $A \neq 0$). Zweitens müssen die entsprechenden Richtungskosinus gleich sein: $\eta'_{i\varrho} \equiv \eta_{i\varrho}$; $\eta'_{i\omega} \equiv \eta_{i\omega}$. Dafür sind die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen $c_{i\kappa} = c_{\kappa i}$ notwendig und hinreichend. Es folgt nämlich, analog der Symmetriebedingung von A_{00} für den Tensor (Nr.26), aus $\eta'_{i\varrho} \equiv \eta_{i\varrho}$ in (13a)

$$c_{i\kappa} = \sum_{\varrho=1}^{n-1} \eta'_{i\varrho} \eta_{\kappa\varrho} \Lambda_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{n-1} \eta'_{\kappa\varrho} \eta_{i\varrho} \Lambda_\varrho = c_{\kappa i}$$

und umgekehrt aus der Voraussetzung der Symmetrie wegen $d_{i\kappa} \equiv d_{\kappa i}$

---

34) Vgl. die Gleichung in SFK 5), S.249 oben.

die Übereinstimmung der Nebenachsenprobleme: $\eta_{ig}' = \eta_{ig}$ und damit auch die Koinzidenz der Hauptachsen; auf letztere können wir auch aus (26) und (31) in

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ik}\,\eta_{in} = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\,\eta_{in}' = \sigma \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

schließen. Drittens muß $\Lambda_\sigma = \pm\Lambda_n$ erfüllt sein; siehe Gl. (14) und (18). Viertens sind aber die Gleichungen $\Lambda_\sigma = \Lambda_o$ nicht als (n-1) Bedingungen zu zählen, sondern, weil die Invarianten nach dem Satz von Weierstrass bevorzugte Größen sind, als $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen. Die Determinante $F(\Lambda_o^2)$ muß den Rang 1 haben.

Es bleiben also für die Bestimmung eines Fugators noch (2n-1) Parameter übrig, wie es sein muß. Man wähle z.B. den Mittelpunkt $M=N'\,(1;\, m_{10}, m_{20}, \ldots, m_{n0})$ und den unendlichfernen Punkt der Hauptachse, $N=M'\,[(0;\, \eta_{1n}, \eta_{2n}, \ldots\ldots, \eta_{nn})$ mit $\sum_{k=1}^{n} \eta_{kn}^2 = 1]$. Dann erhalten wir ($\Lambda_o = 1$) in (13a) direkt die Parameterdarstellung

$$\begin{cases} a_{ik} = \delta_k^i - \eta_{in}\,\eta_{kn} + m_{i0}\,\eta_{kn} & (i,k = 1,2,\ldots,n) \quad (38a) \\ a_{i0} = -m_{i0} - (m_{i0} - \eta_{in}) \sum_{k=1}^{n} \eta_{kn}\, m_{k0} \mp \eta_{in} & (38b) \\ a_{0k} = \eta_{kn} & (38c) \\ a_{00} = -\sum_{k=1}^{n} \eta_{kn}\, m_{k0} & (38d) \end{cases}$$

Der Fugator ist ein positiver bzw. negativer, wenn wir das obere bzw. untere Vorzeichen wählen. Ist irgend eine Kollineation gegeben, so können wir sie, wenn wir gerade die ihr entsprechenden Größen m_{i0}, η_{kn} in (38) einsetzen, mit Hilfe dieses Fugators in eine Affinität mit denselben Komponenten und demselben Hauptsystem verwandeln.

§ 8. Fokaleigenschaften affiner Räume. [35]

34.

Die "Fokaleigenschaften" wurden von Smith und Reye und andern nur für nichtaffine Kollineationen der Ebene und des Raumes definiert und untersucht. Für uns im R_n dagegen werden die "Fokal-

---

35) Einfachere synthetische, allgemein bekannte Bemerkungen zur Affinität des R_3 siehe bei Th. Reye, R II 4), S.64 und R. Sturm, a.a.O.12), Bd.III, S.25. Das Wesentliche über ähnliche und kongruente Gebilde im affinen R_3 ist analytisch dargestellt in S F K 5), S.254. - Einiges über den R_n bei P. H. Schoute, a.a.O. 7), 1.Teil, S.209 und in G. Veronese, "Behandlung der projektiven Verhältnisse .....", Math.Ann.19 (1882), S.161.

eigenschaften der Affinität" schon für sich interessant genug sein und außerdem die Grundlage bilden für diejenigen der nicht affinen Kollineationen. Im wesentlichen stellen sie die geometrischen Deutungen der in § 6 gegebenen analytischen Ausführungen dar.

Der unendlichfernen Hyperebene $\bar{\omega}$ von R entspreche also durch $\mathfrak{a}$ die unendlichferne $\bar{\omega}'$ in R'. Allen parallelen Geraden, Ebenen, Räumen sind wieder solche homolog; auch bei teilweisem Parallelismus zweier Räume bleibt der Grad erhalten. Alle eigentlichen Unterräume werden affin transformiert. Besonders ist jede gerade eigentliche Punktreihe ihrem Bild ähnlich. Führt man auf beiden nichthomogene Koordinaten y, y' ein mit zugeordneten Anfangspunkten, so gilt $y' = \lambda \cdot y$, wo λ nur vom uneigentlichen Punkte der Geraden abhängt. Jedes Parallelogramm geht in ein Parallelogramm über. Daraus folgt, daß die Umgebung jedes eigentlichen Punktes stets in gleicher Weise verzerrt wird. Es genügt also, nur die Zuordnung der Elemente durch zwei beliebige homologe Punkte O und O' und ihrer nächsten Umgebung zu betrachten. Dies wollen wir tun.

35.

Wir bezeichnen das absolute Polarsystem von R in $\bar{\omega}$, dessen Inzidenzfläche also - analog dem unendlichfernen Kugelkreis des R_3 - die imaginäre "unendlichferne Kugelsphäre" in $\bar{\omega}$ ist, mit $\bar{\pi}$ und das durch $\mathfrak{a}$ entsprechende Polarsystem in $\bar{\omega}$ mit $\bar{\pi}'$; ferner das Absolute von R' mit $\bar{m}'$ und das durch $\mathfrak{a}^{-1}$ in R entsprechende mit $\bar{m}$. Dabei haben wir die Querstriche an $\bar{\pi}$ und $\bar{m}'$ angebracht, um sofort die wirklich a b s o l u t e n P o l a r s y s t e m e v o n R u n d R' wiederzuerkennen, die ja nach dem Gedankengang der Nr.12 grundlegend für die äquiforme Geometrie in den Räumen R und R' sind, während $\bar{m}$ und $\bar{\pi}'$ irgendwelche durch $\mathfrak{a}$ bedingte, als Bilder der absoluten Polarsysteme gleichfalls elliptische Polarsysteme in den Wänden $\bar{\omega}$ und $\bar{\omega}'$ sind.

Die äquiformen Eigenschaften irgend eines Gebildes $\mathfrak{G}$ in R sind durch seine projektiven Beziehungen (Inzidenzen, Doppelverhältnisse) zu $\bar{\pi}$ gegeben. Die projektiven Beziehungen dieses Gebildes $\mathfrak{G}$ zu $\bar{m}$ aber sind - das ist die wesentlichste Eigenschaft jeder Kollineation $\mathfrak{a}$ überhaupt (vgl. Nr.4) - invariant gegen $\mathfrak{a}$ und demnach übereinstimmend mit den projektiven Beziehungen zwischen $\mathfrak{G}'$ und $\bar{m}'$. Folglich ist uns durch $\bar{m}$ <u>schon in R</u> die Metrik - abgesehen von einem Ähnlichkeitsfaktor - des Raumes R' gegeben. Zum Beispiel bestehe G aus zwei Geraden g_1 und g_2, welche die

Wand $\bar{\omega}$ in konjugierten Punkten bezüglich $\mathfrak{m}$ treffen. Dann werden ihre Bilder g_1' und g_2' in R' zueinander normal sein. Wären nun g_1 ung g_2 außerdem schon in R orthogonal, d.h. wären ihre uneigentlichen Punkte konjugiert sowohl bezüglich $\mathfrak{m}$ als auch $\bar{\mathfrak{n}}$, so würde ein paar zueinander senkrechter Geraden vorliegen, die durch $\mathfrak{a}$ in ein ebensolches abgebildet werden.

Auf der Suche nach rechten Winkeln in R, denen Rechte in R' entsprechen, stoßen wir somit auf die Frage nach einem (oder mehreren) gemeinsamen Polarsimplex von $\bar{\mathfrak{n}}$ und $\mathfrak{m}$. Allgemein können wir sagen, wenn wir statt eines bestimmten Gebildes $\mathfrak{G}$ in R die Gesamtheit aller geometrischen Gebilde zulassen und dann Abbildungseigenschaften suchen, die unabhängig von der gegenseitigen Lage der Räume sind: Die äquiformen Eigenschaften von $\mathfrak{a}$ sind durch das gegenseitige projektive Verhalten der beiden Polarsysteme $\bar{\mathfrak{n}}$ und $\mathfrak{m}$ in $\bar{\omega}$ (oder auch ihrer Bilder $\mathfrak{n}'$ und $\mathfrak{m}'$ in $\bar{\omega}'$) vollständig bestimmt.

36.

Es existiert mindestens ein reelles, g e m e i n s a m e s P o l a r s i m p l e x von $\bar{\mathfrak{n}}$ und $\mathfrak{m}$; denn beide sind elliptisch (Nr.11). Dessen Schein aus einem beliebigen eigentlichen Punkt O liefert ein Cartesisches Koordinatensystem, dem in R' wieder ein Cartesisches entspricht. Nennen wir die Ähnlichkeitsverhältnisse auf seinen n Achsen $\Lambda_{10}, \Lambda_{20}, \ldots, \Lambda_{n0}$ und bedenken wir noch, daß die zu den Hauptwänden dieses Hauptsystems parallelen Hyperebenen durch P drüben in R' durch P' gehen und parallel zu den Wänden des dort entsprechenden Hauptsystems sind, so haben wir den Hauptsatz, Seite 21, bewiesen. Nebenbei folgt der

Satz:[36] In zwei kollinearen Bünden O, O' gibt es stets zwei homologe Entupel paarweise orthogonaler Geraden aus O und O'.

Zugleich ist eine Einteilung des Raumes R_n durch ein O r t h o g o n a l s y s t e m gefunden, dem in R_n' ein Orthogonalsystem entspricht; nämlich das System aller Geraden, Ebenen,...., Hyperebenen parallel zu den Hauptachsen, Hauptebenen,...., Hauptwänden. Dieses Orthogonalsystem ist für das unmittelbare Verständnis der Affinitäten das wichtigste Hilfsmittel. Nennen wir die Verallgemeinerung eines Rechtecks, Quaders auf den R_n eine "Kiste" [37], die des Quadrats, Würfels mit den Kanten 1 ein "Maßpolytop"[37], und erweitern wir auch den Begriff des Inhalts[37] sinngemäß, so können wir sagen: Wir haben eine Zerlegung des Raumes R_n in Maßpolytope gefunden, der eine Zerlegung von R_n' in

---

36) Enzykl.d.math.Wiss. III C 7, S.825.
37) P. H. S c h o u t e, a.a.O.7), 2.Teil, S.93-96.

lauter ähnliche Kisten gleichen Inhalts $\prod_{k=1}^{\tilde{n}} \Lambda_{k0} = \prod_{k=1}^{\hat{n}} (\Lambda_k : \Lambda_0) = A : a_{\infty}^{n+1}$ (vgl. Nr.19) entspricht. Weil sich aber jeder Inhalt eines beliebigen Raumstücks durch Elementarkisten annähern läßt, folgt:

Der Inhalt eines endlichen Raumstücks in R verhält sich zum Inhalt des homologen in R' konstant wie $1 : \frac{A}{a_{\infty}^{n+1}}$.

Für $A = a_{\infty}^{n+1}$ ist das Verhältnis 1; entsprechende Volumina dieser "äquiaffinen" Räume sind gleich.

Sind p der Komponenten Λ_{k0} untereinander gleich, so wird der Verbindungs-$[p]$ der zugehörigen Hauptachsen ähnlich transformiert. In seinem uneigentlichen $[p-1]$ induzieren $\bar{\pi}$ und $\bar{\pi}'$ dieselben Polarsysteme. Es gibt nicht nur ein gemeinsames Polarsimplex von $\bar{\pi}$ und $\bar{\pi}'$ in $\bar{\omega}$, sondern jene p Hauptachsen können durch irgendwelche andere paarweis orthogonale in ihrem Verbindungs-$[p]$ ersetzt werden, was auf $\binom{p}{2}$-fach unendlich viele Arten geschehen kann (vgl. Nr.24). Es gibt auch nicht nur ein Orthogonalsystem, wie wir es oben beschrieben haben, sondern die affinen Räume haben rotatorische Eigenschaften innerhalb dieses Haupt-$[p]$.

37.

Die geometrische Deutung des Satzes von Weierstrass ist nach dem Vorhergehenden die, daß, wenn zwei Polarsysteme, nämlich $\bar{\pi}$ und $\bar{\pi}'$ in $\bar{\omega}$, auf (p-1) Kanten eines gemeinsamen Polarsimplex, die alle in einem $[p-1]$ liegen, gleiche Punktinvolutionen induzieren, sie auch in diesem ganzen $[p-1]$ identische Polarsysteme induzieren. Dies wird klarer hervortreten, wenn wir den in Fußnote 24) angedeuteten Gedankengang in etwas anderer Form genauer ausführen. Zugleich werden sich unsere metrischen Invarianten Λ_{k0} als p r o j e k t i v e I n v a r i a n t e n e i n e r K o l l i n e a t i o n (Nr.8) entpuppen.

Wir berücksichtigen nur die uneigentlichen Punkte von R und R'. Weil durch α einerseits $\bar{\pi}$ in $\bar{\pi}'$, andererseits $\bar{\pi}$ in $\bar{\pi}'$ verwandelt wird (Nr.9), gelten die Gleichungen

$$\bar{\pi} = \alpha \bar{\pi}' \alpha^{-1} \tag{39}$$

und

$$\bar{\pi}' = \alpha^{-1} \bar{\pi} \alpha. \tag{40}$$

Man vergleiche jetzt schon den zugehörigen (mittleren) Teil in Figur d) und in Figur e). Sei nun φ irgend eine Kollineation, die das Absolute $\bar{\pi}; \bar{\pi}'$ in sich transformiert, also eine Kollineation der "Hauptgruppe", eine Ähnlichkeitstransformation, so gilt

für sie

$$\bar{m}' = \zeta \bar{m}' \zeta^{-1} \tag{41}$$

und

$$\bar{\pi} = \zeta \bar{\pi} \zeta^{-1} \tag{42}$$

oder, was damit gleichbedeutend ist,

$$\zeta^{-1} \bar{\pi} = \bar{\pi} \zeta^{-1} \tag{43}$$

und

$$\bar{m}' \zeta^{-1} = \zeta^{-1} \bar{m}' . \tag{44}$$

Jetzt betrachten wir die Kollineation

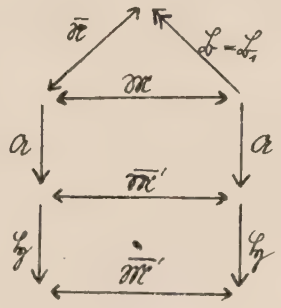
$$\mathfrak{L} = m \bar{\pi} = a \bar{m}' a^{-1} \bar{\pi} , \tag{45}$$

deren Koinzidenzsimplex das in Nr.36 besprochene gemeinsame Polarsimplex von $\bar{\pi}$ und m ist. Wir behaupten, daß $\mathfrak{L}$ sich nicht ändert, wenn wir nachträglich nur den einen Raum R' bewegen, d.h. wenn wir a ersetzen durch

$$a_1 = a \zeta . \tag{46}$$

Dies ist klar, denn $\bar{\pi}$ und m bleiben dieselben. Genauer folgt es mit Hilfe von (41) aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1 &= a_1 \bar{m}' a_1^{-1} \bar{\pi} \\ &= a \zeta \bar{m}' \zeta^{-1} a^{-1} \bar{\pi} \\ &= a \bar{m}' a^{-1} \bar{\pi} = \mathfrak{L} . \end{aligned} \tag{47}$$



Figur d.)

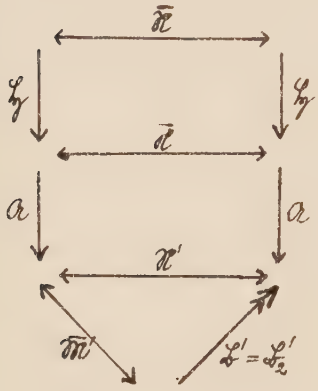
Bewegen wir aber den Raum R, ersetzen also a durch

$$a_2 = \zeta a , \tag{48}$$

so kommen wir mit (43) zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_2 &= a_2 \bar{m}' a_2^{-1} \bar{\pi} \\ &= \zeta a \bar{m}' a^{-1} \zeta^{-1} \bar{\pi} \\ &= \zeta a \bar{m}' a^{-1} \bar{\pi} \zeta^{-1} = \zeta \mathfrak{L} \zeta^{-1} , \end{aligned} \tag{49}$$

d.h. $\mathfrak{L}$ wird durch $\mathfrak{H}^{-1}$ in $\mathfrak{L}_1$ transformiert. Beidesmal bleiben aber, das ist uns die Hauptsache, die projektiven Invarianten von $\mathfrak{L}$ erhalten. Nun ist aber die Kollineationsdeterminante von $\mathfrak{L}$, wie man leicht nachrechnet, gerade die symmetrische Determinante der b_{ik}, die durch Gl.(6) in Nr.21 definiert wurden, und die Koinzidenzgleichung von $\mathfrak{L}$ ist gerade die Hauptachsengleichung (10). Damit ist bewiesen, daß die aus $D(\Lambda^2)=0$ berechneten Wurzeln Invarianten dagegen sind, daß man nur einen der kollinearen Räume bewegt.



Figur e.)

Ähnlich findet man für die Kollineation

(50) $$\mathfrak{L}' = \bar{\mathfrak{m}}'\mathfrak{x}'$$

mit Berücksichtigung von (42) und (44)

(51) $$\mathfrak{L}_1' = \mathfrak{H}^{-1}\mathfrak{L}\mathfrak{H}$$ und

(52) $$\mathfrak{L}_2' = \mathfrak{L}'.$$

Weil die Kollineations-Determinante von $\mathfrak{L}'$ die Elemente k_{ik}' enthält, sind auch die Wurzeln von (10') solche metrischen Invarianten, und weil $\mathfrak{L}$ aus $\mathfrak{L}$ durch Transformation mit a entstanden ist:

(53) $$a^{-1}\mathfrak{L}a = a^{-1}a\bar{\mathfrak{m}}'a^{-1}\bar{\mathfrak{x}}a = \mathfrak{L}',$$

sind diese Wurzeln dieselben wie die von (10).

Die geometrische Deutung des Satzes, daß die symmetrische Hauptachsengleichung reelle Wurzeln hat, ist nach dem Vorhergehenden der projektive Satz der Nr.11. Befänden wir uns demnach in einer nichteuklidischen Geometrie, in der das Absolute auch reelle Punkte hätte, so müßte ein analoger Hauptsatz im Reellen nicht für jede Kollineation gültig sein. Wir sehen, daß in gewisser Beziehung der Zusatz "in Euklidischen Räumen" in der Überschrift der vorliegenden Arbeit wesentlich ist.

38.

Wir suchen diejenigen linearen Räume von R, denen in R' kongruente homolog sind und nennen sie "K o n g r u e n z r ä u m e". Vorzeichenunterschiede brauchen keine gemacht zu werden, weil symmetrische Unterräume durch Bewegung über den R_∞ zur Deckung gebracht werden können. Zuvor ordnen wir die Numerierung der Hauptachsen nach der Größe der $\Lambda_{k_0}^2$ so, daß $\Lambda_{1_0}^2$ das größte ist. Sind

jetzt die ersten s Werte λ_{∞}^{r} größer als 1, folgen dann e Werte gleich 1 und schließlich t Werte kleiner als 1 (s+e+t=n), so hat der Tensor s Dehnungs-, t Pressungs- und e-Kongruenz-Achsen[38].

Eine affine Ebene hat nur dann eine (genauer: zwei symmetrisch zu den Hauptachsen liegende) Kongruenzachsen, wenn ihr Tensor (e=o) eine Dehnung und eine Pressung enthält. Denn einem Einheitskreis in R entspricht in R' eine Ellipse, die nur dann auch Mittelpunktsradien der Länge 1 besitzen kann, wenn die halben Längen ihrer Hauptachsen nicht zugleich beide größer oder kleiner als 1 sind.

Daraus können wir beweisen, daß ein affiner R_3 keine Kongruenz-Ebene "allgemeiner Lage" - d.h. schief im Hauptsystem, nicht inzident mit einer Hauptachse - besitzen kann. Nämlich eine solche müßte alle drei Hauptebenen in Kongruenzgeraden treffen. Liegt also in der ersten Hauptachse Dehnung vor, dann muß in der zweiten Pressung und in der dritten Dehnung, also in der ersten Pressung sein, was ein Widerspruch ist. Wenn also überhaupt eine Kongruenzebene des affinen R_3 existiert, muß sie mindestens eine Hauptachse enthalten, die damit zugleich Kongruenzachse sein muß ($e>0$). Die Fälle $e=3$ (Identität) und $e=2$ (Dehnung des Raumes in nur einer Richtung) sind leicht zu übersehen. Für $e=1$ muß eine Kongruenzebene, wenn eine existiert, durch die Kongruenzhauptachse gehen und die dazu normale Hauptebene ebenfalls in einer Kongruenzachse treffen, was nach dem Vorhergehenden nur für $s=1$, $t=1$ möglich ist. Dann gibt es tatsächlich zwei Kongruenzebenen durch die Kongruenzhauptachse unter gleichen Winkeln zu den Hauptebenen. Durch Erweiterung dieses Gedankengangs auf den R_n wollen wir den Satz beweisen:

> Eine Affinität mit s Dehnungs-, t Pressungs- und e Kongruenz-Hauptachsen (s+e+t=n) besitzt Unterräume von R, die ihren Bildern in R' kongruent sind, bis zu der Dimension
>
> $$k = \mathrm{Min}\,(s,t) + e.$$

Zum Beweis dürfen wir annehmen, daß e = o sei und $s \geq t$; denn andernfalls betrachte man vorerst nur den Haupt-[n-e] normal zum Kongruenz-Haupt-[e], bzw. man vertausche s und t. Wäre nun k = t+1, so müßte dieser Kongruenz-[k] von jedem Haupt-[n-t], d.h. Haupt-[s], in mindestens einer Kongruenzgeraden geschnitten werden. Das ist aber für den Haupt-[s], der die s Dehnungsachsen enthält, nicht möglich. - Andererseits sehen wir, daß tatsächlich

---

38) Die ausgearteten Affinitäten (A=o) können wir hier leicht zulassen und die Achsen mit verschwindender Komponente zu den Pressungsachsen zählen.

ein Kongruenz-[t] besteht. Wir erhalten ihn so: Wir paaren mit jeder Pressungshauptachse eine Dehnungshauptachse, keine zwei mit der gleichen, was wegen $s \geqq t$ möglich ist. In jeder der t Verbindungsebenen wähle man eine gleichstreckige Gerade, dann ist der Verbindungs-[t] dieser seinem Bilde kongruent. Denn einem t-Tupel orthogonaler Geraden in ihm entspricht ein t-Tupel orthogonaler kongruenter Geraden. Damit ist der Beweis geliefert.

Die Zahl k können wir auch darstellen durch $k = n - \mathrm{Max}(s,t)$. In allgemeiner Lage (e=o) gibt es also für gerades n höchstens Kongruenz-$\left[\frac{n}{2}\right]$, für ungerades n Kongruenz-$\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Daß eine Affinität einer "Perspektivität" äquivalent ist, heißt gemäß der Erklärung dieses Begriffs in Nr.7, daß in R eine Wand vorhanden sein muß, die durch Bewegung des starren Raumes R so auf ihre entsprechende in R' gelegt werden kann, daß jeder Punkt dieser Wand mit seinem homologen zur Deckung gekommen ist. Die Ähnlichkeit z.B. (Nr.14) ist der Perspektivität äquivalent in unserem Sinne, wobei die unendlichferne Hyperebene $\bar{\omega}$ Perspektivitätswand wird. Von diesem Sonderfall sehen wir ab. Eine von $\bar{\omega}$ verschiedene Wand kann aber die obige Bedingung genau dann erfüllen, wenn sie ihrem Bilde kongruent ist. Demnach muß im vorhergehenden Satz $k = n-1$ und $e \geqq n-2$ sein, d.h.

Satz:[39] Zwei affine (nicht ähnliche) Räume können dann und nur dann durch Bewegung in perspektive Lage gebracht werden, wenn die (n-2) mittleren Λ_{ko}^2 gleich der Einheit sind.

Analytisch wird die Gesamtheit aller Kongruenzgeraden von R aus O dargestellt durch die Gleichung des Hyperkegels 2.O. aus O:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\Lambda_{ko}^2 - 1\right) X_{ko}^2 = 0, \tag{54}$$

der die Schnittfläche der Einheitssphäre

$$\sum_{k=1}^{n} X_{ko}^2 = 1 \tag{55}$$

mit dem (der Einheitssphäre von R' homologen) "Deformations-Hyperellipsoid"

$$\sum_{k=1}^{n} \Lambda_{ko}^2 X_{ko}^2 = 1 \tag{56}$$

aus O projiziert. Jeder lineare Unterraum des Kegels (54) ist Kongruenzraum.

Raumkurven, deren Länge in allen Einzelteilen konstant transformiert wird, sind solche, deren Tangenten nur Parallelen zu den

39) Erweiterung des Satzes von K. K o m m e r e l l, K II 5), S.50 auf den R_n.

Geraden des Kegels (54) sind. Daraus erhält man leicht eine hiefür notwendige und hinreichende Differentialgleichung.

39.

Damit können wir auch Einiges über "Ähnlichkeitsräume" aussagen. Denn wenn wir z.B. auf R' nachträglich noch alle möglichen Ähnlichkeitstransformationen aus O mit den Faktoren a ausüben, so wird jedes ähnlich bezogene Raumpaar einmal kongruent, und jeder Kongruenzraum bleibt stets Ähnlichkeitsraum. Setzen wir demnach in den Untersuchungen der letzten Nummer a an Stelle von 1 und bezeichnen mit s_a, bzw. e_a bzw. t_a die Zahl der Λ_{k0}^2 größer, bzw. gleich, bzw. kleiner a^2, so ist die Dimension des höchsten Ähnlichkeitsraumes

$$\ddot{a} = \max_a \left(\mathrm{Min}(s_a, t_a) + e \right) \quad \text{für alle Zahlen a .}$$

Durch einfache Überlegungen findet man, daß im allgemeinen Fall verschiedener Tensorkomponenten für ungerades n : $\ddot{a} = \frac{n+1}{2}$, für gerades n : $\ddot{a} = \frac{n}{2}$ ist. Im ersten Fall muß a^2 gleich dem mittleren Λ_{k0}^2 sein und der Ähnlichkeitsraum eine Hauptachse enthalten. Im zweiten Fall kann a^2 zwischen den beiden mittleren Λ_{k0}^2 liegen (oder auch mit einem dieser beiden Werte übereinstimmen) und der Ähnlichkeitsraum kann allgemeine Lage haben.

Die Ähnlichkeitsräume mit dem Faktor a sind alle linearen Unterräume des Hyperkegels

$$(57) \qquad \sum_{k=1}^{n} \left(\Lambda_{k0}^2 - a^2 \right) X_{k0}^2 = 0 .$$

Durch jede Gerade aus O geht genau einer dieser Kegel. Dabei liegt a^2 stets zwischen Λ_0^2 und Λ_∞^2 .

Gibt es in der Affinität homologe $[k]$-Sphären, so müssen ihre Träger-$[k]$ ähnlich sein (Nr.17). Umgekehrt werden alle Sphären in einem Ähnlichkeitsraum in Sphären transformiert. Im allgemeinen gibt es daher höchstens $\left[\frac{n+1}{2}\right]$-Sphären bzw. $\left[\frac{n}{2}\right]$-Sphären. Gibt es höhere (spezielle Lage!), so hat die Affinität spezielle rotatorische Eigenschaften um die Hauptachsen.

40.

Jetzt suchen wir die "Fokalräume" von R durch O, das sind diejenigen linearen Räume $[f]$, die folgende Eigenschaft haben: Gehen zwei beliebige $[f+1]$,..., $[n-1]$ durch $[f]$ als Träger, so haben ihre Bilder in R' durch den Fokalraum $[f]'$ denselben Winkel, d.h. dasselbe Doppelverhältnis bezüglich des Absoluten, miteinander. Wir behaupten, daß

> jedem Ähnlichkeits-$[k]$ von R ein Fokal-$[n-k]$ von R in einer noch zu definierenden Weise zugeordnet ist.

Die Rechnung, die am zweckmäßigsten in Hyperebenenkoordinaten geschehen müßte, unterlassen wir.

Grundlegend sind die Fokal-[n-2]. Das [n-1]-Büschel durch einen solchen wird in ein kongruentes abgebildet. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn eine Rechtwinkelinvolution in diesem Büschel wieder in eine solche übergeht. Wir finden die Fokal-[n-2] durch folgenden Gedankengang:

Wenn die Hauptsysteme von R und R' ineinander liegen, so folgt aus $OX \perp OY'$ notwendig $OX' \perp OY$ und umgekehrt. Dies ersehen wir leicht aus

$$\sum_{k=1}^{n} \Lambda_{k_0} X_{k_0} Y_{k_0} \equiv \sum_{k=1}^{n} X_{k_0} \cdot \Lambda_{k_0} Y_{k_0} .$$

Sind also α und α' homologe [k], so sind $\beta' \perp \alpha$ und $\beta \perp \alpha'$ homologe [n-k]. Man beachte die Vertauschung von α und α^{-1}! Speziell: Sind α und α' zwei beliebige homologe Ebenen durch O, so sind $\beta' \perp \alpha$ und $\beta \perp \alpha'$ homologe [n-2]. Wird eine Rechtwinkelinvolution von Strahlen in α in eine solche in α' transformiert, dann wird auch eine Rechtwinkelinvolution von Hyperebenen um β in eine solche um β' verwandelt. Oder elementarer: Sind Y und Z irgend zwei unendlichferne Punkte einer Ähnlichkeitsebene α, also $\sphericalangle(OY,OZ) = \sphericalangle(O'Y',O'Z')$, und sind η' bzw. ζ' Hyperebenen mit den Normalen OY, bzw. OZ, ferner η bzw. ζ Hyperebenen mit den Normalen OY', bzw. OZ', dann sind η und η', ζ und ζ' homolog und es gilt: $\sphericalangle(\eta'\zeta') = \sphericalangle(\eta\zeta)$. Auch die Umkehrung dieses Schlusses ist richtig. Also:

Ist α Ähnlichkeitsebene, dann ist $\beta \perp \alpha'$ Fokal-[n-2]. Ist β Fokal-[n-2], dann ist $\alpha \perp \beta'$ Ähnlichkeitsebene.

Sind γ und γ' zwei ähnliche [k] mit $k > 2$, so sind alle homologen Ebenenpaare in ihnen ähnliche. Sind $\delta' \perp \gamma$ und $\delta \perp \gamma'$ deren Normal-[n-k], so tragen alle [n-2] durch sie Kongruenz-[n-1]-Büschel. δ und δ' sind Fokal-[n-k].

Ein Fokal-[f] geringster Dimension von R steht auf einem Ähnlichkeits-[n-f] höchsten Dimension von R' senkrecht, wenn die Hauptsysteme zusammenfallen. Im allgemeinen Fall verschiedener Tensorkomponenten ist bei geradem n die kleinstmögliche Dimension $f = \frac{n}{2}$, während bei ungeradem n die Fokal-[f] mit $f = \frac{n-1}{2}$ in einer (bestimmten) Hauptwand liegen müssen.

41.

Zwangsweise ist auch der synthetische Teil unserer Theorie jetzt zu einer Theorie der Hyperflächen 2.O. geworden, wie wir es in § 5 vorausgesagt haben. Wir deuten nur die naheliegendsten,

F o l g e r u n g e n f ü r d i e H y p e r f l ä c h e n 2.O. an:

Durch Vergleich des 1.Satzes der Nr.38 mit der Gl.(54), Seite 44, kommen wir zu der projektiven Aussage, daß ein Hyperkegel aus O : $\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa x_{\kappa o}^2 = o$ mit reellen Koeffizienten, von denen s positiv, t negativ und e verschwindend sind, lineare Räume enthält, deren Dimension gleich oder kleiner (Min (s,t) + e) ist. Betrachten wir die Hyperfläche im Unendlichen, deren Schein dieser Hyperkegel ist, so folgt als geometrische Erklärung des Sylvester'schen Trägheitssatzes das Theorem von Segre[40], hier zwar für eine allgemeine Hyperfläche des (unendlichfernen) R_{n-1} bewiesen, aber nachträglich wieder für den n-dimensionalen Raum ausgesprochen in der Form:

> Die Dimensionen der reellen linearen Räume, die in $\sum_{i=o}^{n} a_i x_i^2 = o$ (x_i homogene Koordinaten) enthalten sind, sind diejenigen ganzen Zahlen, die kleiner sind als die Anzahl der positiven Koeffizienten a_i sowohl als die der negativen, wobei verschwindende Koeffizienten zu beiden zu rechnen sind.

Dieser Satz führt zu einer Einteilung der Hyperflächen gemäß ihrer reellen linearen Räume; durch Unterteilung nach den reellen linearen Räumen des Schnittes mit $\bar{\omega}$ entsteht die Verallgemeinerung der Klassifikation im R_3. - Aus dem Theorem von Segre oder aus der Bemerkung über höchste Kongruenzräume in Nr.38 folgt,

> daß eine nicht ausgeartete Hyperfläche 2.O. in R_n einen reellen linearen Raum von höchstens der Dimension $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ oder $\frac{n-1}{2}$ haben kann, je nachdem n gerade oder ungerade ist.[40]

Ist a veränderlich gedacht, so stellt (57) ein "Büschel konzyklischer Hyperkegel" dar mit dem Schnittkegel 4.O. aus O, in dem sich der isotrope Kegel von R und der dem isotropen von R' in R entsprechende treffen, als Basiskegel. Oder: Das Flächenbüschel in $\bar{\omega}$, dessen Schein obiges Kegelbüschel ist, enthält $\mathfrak{M}$ (für a=o) und $\bar{\mathfrak{M}}$ (für a= ∞).

Der Einheitssphäre von R' entspricht in R das Deformationshyperellipsoid (56), das in $\bar{\omega}$ gerade $\mathfrak{M}$ induziert. Sein Hauptachsenproblem ist das Hauptachsenproblem der Affinität[41]. In seiner allgemeinen Lage vom ursprünglichen Koordinatensystem aus

---

40) Fast wörtlich aus Enzykl.d.math.Wiss. III C 7, S.852. - Vgl. E. B e r t i n i, a.a.O.7), S.133 f. und S.139 f.

41) Das ist die Methode von K. K o m m e r e l l , zuerst gegeben in K I 5), S.39 f., wiederabgedruckt in SFK 5), S.250 f.

gesehen hat es die Gleichung

$$\sum_{\varkappa,\kappa=1}^{n} b_{i\varkappa}\, x_{i\iota}\, x_{\kappa\iota} = 1 . \tag{58}$$

Die Determinante $D(\Lambda^2)$ ist die Diskriminante des Flächenbüschels in $\bar{\omega}$, das $\mathfrak{M}$ und $\bar{\mathfrak{k}}$ enthält. Die Hauptachsengleichung (10) fragt nach den Spitzen der dem Büschel angehörigen Kegelflächen, d.h. nach dem gemeinsamen Polarsimplex. Analoges gilt für das (der Einheitskugel von R in R' homologe) Ellipsoid

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{X'^2_{\kappa\iota}}{\Lambda^2_{\kappa\iota}} = 1 . \tag{59}$$

Ein Entupel konjugierter Halbmesser von ihm war in R ein Entupel normaler Einheitsstrecken.

Die Ähnlichkeits-[ä] von R (Nr.39), also die linearen [ä] des Büschels konzyklischer Kegel (57), sind die [ä]-Sphären-Schnitt-[ä] des Deformationsellipsoids (56) durch O.

Das allgemeine, nicht rotatorische Ellipsoid des R_n enthält als höchste Sphären $\left[\frac{n}{2}\right]$-Kugeln bzw. $\left[\frac{n+1}{2}\right]$-Kugeln. Im zweiten Fall (für ungerades n) haben deren Räume stets spezielle Lage und gehen durch die Hauptachse mit dem Halbmesser mittelster Größe[42].

Errichten wir auf jeder Geraden des Büschels konzyklischer Kegel (57) durch O die normale Hyperebene, so entsteht die "Schar konfokaler Hyperkegel" :

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{X'^2_{\kappa\iota}}{\Lambda^2_{\kappa\iota} - a^2} = 0 , \tag{60}$$

aber nicht als Punktgebilde gedacht, sondern in dualer Weise als Tangentialgebilde. Ist ein [f] durch O so beschaffen, daß alle Hyperebenen durch ihn zu einem Scharkegel von (60) gehören, so liegt sein normaler [n-f] ganz in einem Büschelkegel von (57). Jener [f] ist also Fokal-[f] von R' (Nr.40). Von seinem unendlich-fernen [f-1] aus geht ein "Rotationszylinder" an das R'-Ellipsoid (59). Er ist die Verallgemeinerung der unendlichfernen Fokalpunkte einer Fläche 2.O. im R_3. Gehen wir durch die Affinität $\mathfrak{A}^{-1}$ zurück zu R, so erhalten wir einen Fokal-[f] in R :

Es sei ein [n-f]-Sphären-Schnitt-[n-f] des Ellipsoids $\sum_{\kappa=1}^{n} \Lambda^2_{\kappa\iota} X^2_{\kappa\iota} = 1$ gegeben. Wir errichten auf ihm den Normal-[f]

---

42) Ebenso leicht könnten wir noch die Verallgemeinerung des Satzes in SFK 5), S.157 oben, zur analytischen Bestimmung der Kreisschnitte des Ellipsoids allgemeiner Lage folgern.

durch O. Üben wir jetzt auf diesen von den Hauptachsen des Ellipsoids aus den Tensor mit den Komponenten $\frac{1}{A_{ke}}$ aus, so projiziert der neue $[f]$ einen unendlichfernen Fokal-$[f-1]$ des Ellipsoids[43].

Der letzte Satz der Nr.40 liefert noch eine Aussage über die Dimension der geringsten Fokal-$[f-1]$ im Unendlichen.

Jetzt endlich ist auch der Name "Fokaleigenschaften affiner Räume", der in der Überschrift dieses Paragraphen steht, durch die Beziehung zu den Fokaleigenschaften der Flächen 2.O. gerechtfertigt. Wir wollen allerdings, den Begriff ausdehnend, jede Eigenschaft einer Kollineation, die unabhängig von der gegenseitigen Lage der Räume, also metrischer Natur ist, eine Fokaleigenschaft der Kollineation nennen. Dann ist jeder Fokaleigenschaft einer Affinität eine metrische Eigenschaft eines Hyperellipsoids äquivalent und umgekehrt. Zum Beispiel steht dem Satz von der Konstanz des Inhaltsverhältnisses (Nr.36) homologer affiner Raumstücke der Satz gegenüber, daß

das Volumen des von irgend n konjugierten Halbmessern eines Ellipsoids gebildeten "Parallelotops" stets dasselbe ist[44].

§ 9. Fokaleigenschaften der nichtaffinen Kollineation.[45]

42.

Jetzt können wir die Fokaleigenschaften für die nichtaffinen Kollineationen größtenteils aus denen der Affinitäten herleiten und die von H. J. St. Smith und Th. Reye und andern für den R_2 und R_3 gegebenen Darstellungen auf mehrdimensionale Räume erweitern.

Weil die uneigentlichen Wände sich nicht mehr entsprechen, müssen wir sie hier verschieden benennen: Es seien $\bar{v}$ und $\bar{\mu}'$ die

---

43) Bezüglich dieses Zusammenhangs der Kreisschnitte und Fokalpunkte im R_3 vergleiche man in SFK 5) die Gl.(12), S. 155 und die Gl.(13), S.369.

44) Vgl. SFK, S.150, Nr.83. Überhaupt hängen die dort in Kap. VI gegebenen Sätze mit unseren Ausführungen eng zusammen.

45) Für den R_2 und R_3 vgl. R. Dürr, a.a.O.6); G. Kilbinger, "Problem der homologen Kreise in kollinearen Räumen", Straßburger Inaug.-Diss., Bonn (1880); Th. Reye, "Über die fokalen Eigenschaften....", a.a.O.4); Scheffers, "Verzerrungen ebener Figuren bei projektiver Abbildung", Leipziger Berichte 44 (1892); H. J. St. Smith, a.a.O. 3). - Das Wichtigste ist zusammengestellt bei R. Sturm, a.a.O.12), Bd.II, S.22 ff. und Bd.III, S.181 und am besten in Th. Reye, R II 4), S.253/56 und S.327/31.

unendlichfernen Hyperebenen, ν' und μ ihre homologen Fluchtwände. Alles, was wir in Nr.35 sagten, um die Bedeutung des gegenseitigen projektiven Verhaltens von $\bar{\pi}$ und $\mathfrak{M}$ für unsere Fragestellung hervorzuheben, gilt unverändert wieder. Wir sehen von diesem höheren Standpunkt aus den grundlegenden Unterschied der nichtaffinen Kollineationen eben darin, daß dieses projektive Verhalten ein gänzlich verschiedenes sein muß, weil die beiden Polarsysteme hier in verschiedenen Wänden liegen. Aber die Frage nach homologen rechten Winkeln z.B. erledigt sich in gleicher Weise wie früher. Wir schneiden zwei Geraden g_1 und g_2 in R einmal mit $\bar{\nu}$, das anderemal mit μ und sehen jedesmal zu, ob die beiden Schnittpunkte konjugiert zu $\bar{\pi}$, bzw. $\mathfrak{M}$ sind. Im ersten Fall wurden die beiden Geraden schon immer "normal in R" genannt, im zweiten Fall sei es der Kürze halber erlaubt, sie einfach "konjugiert in R" zu nennen. Normalen Räumen von R entsprechen konjugierte in R' und umgekehrt, konjugiert-normalen wieder normalkonjugierte.

Ein uneigentlicher Punkt von R kann nur dann wieder in einen uneigentlichen übergehen, wenn er im Schnitt-$[n-2]$ $(\mu \times \bar{\nu}) = \mathfrak{p}$ liegt. Sein Bild liegt dann im Schnitt $(\bar{\mu}' \times \nu') = \mathfrak{p}'$. Parallele Räume werden hiernach nur in parallele transformiert, wenn sie selbst parallel zu μ sind. Jede durch $\mathfrak{p}$ gehende, also parallel zur Fluchtwand verlaufende Hyperebene - solche Wände werden wir stets mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen - wird in ihre entsprechende $\mathfrak{E}'$ affin abgebildet.

43.

Ist M der Pol von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{M}$, $\bar{N}$ in $\bar{\pi}$, so ist $M\bar{N}$ = H a u p t a c h s e von R. Sie steht im Mittelpunkt M senkrecht auf ihrer Fluchtwand und ist konjugiert zur uneigentlichen Wand. Sie geht in die zu ν' hiernach normale Hauptachse $\bar{M}'N'$ von R' über. Die von $\bar{\pi}$ bzw. $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{p}$ induzierten Polarsysteme $\bar{\pi}_\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ sind elliptisch und haben demnach mindestens ein reelles gemeinsames $[n-2]$-Polarsimplex. Dessen Schein aus dem Mittelpunkt M liefert die N e b e n a c h s e n in der Fluchtwand, die aber nicht in die Nebenachsen von R' transformiert werden. Sondern jedesmal entsprechen den Nebenachsen des einen Raumes im andern Raum die uneigentlichen Geraden aus dem unendlichfernen Punkt der Hauptachse nach dem $[n-2]$-Polarsimplex.

Dagegen sind den Parallelen zu den Nebenachsen aus einem Punkt P außerhalb μ die Parallelen zu den Nebenachsen von R' durch P' homolog. Diese sind die Hauptachsen ihrer affinen Hyperebenen $(P\mathfrak{p})$ bzw. $(P'\mathfrak{p}')$. In allen Wänden sind folglich die Hauptachsensysteme der Affinitäten parallel. Trotzdem liefern sie, wenn P

nicht gerade auf h liegt, kein System von n orthogonalen konjugierten Achsen aus P. Denn das Lot $P\bar{N}$ durch P auf ε wird zum Mittelpunktsstrahl N'P'.

Gebieten und Hyperoktanten auf derselben Seite der Fluchtwand μ entsprechen wieder solche; benachbarten auf verschiedenen Seiten von μ diametral gegenüberliegende bezüglich N'. Dem Innern einer Figur V, die nicht von μ geschnitten wird, ist wieder das Innere von V' homolog.

44.

Die Koordinaten der kollinearen Räume seien jetzt auf die eben gefundenen Hauptsysteme bezogen; h und h' seien die n-ten Achsen. Um zu den kanonischen Gleichungen und einem B e w e i s d e s H a u p t s a t z e s (Nr.18) zu gelangen, suchen wir zuerst die Zuweisung der Hyperebenen ε, ε' oder einfach die Zuweisung der Punkte der beiden Hauptachsen. Ist dem Einheitspunkt E von h der Punkt $E'(-\Lambda_{n0})$ von h' homolog, so ist die projektive Beziehung der Punkte der Hauptachsen bestimmt. Analytisch wird sie durch $X'_{n0} = -\Lambda_{n0}^{3} X_{n0}$ ausgedrückt. Die Wand ε_1 durch E wird affin in ihre homologe ε_1' durch E' abgebildet, durch einen Tensor, dessen Hauptachsen die Parallelen zu den Nebenachsen sind. Werden dessen Komponenten $\Lambda_{10}, \Lambda_{20}, \ldots, \Lambda_{n-1,0}$ genannt, dann geht nach § 8 ein Punkt $Q\,(X_{10}, X_{20}, \ldots, X_{n-1,0}, 1)$ von ε_1 in den Punkt $Q'\,(\Lambda_{10}X_{10}, \ldots, \Lambda_{n-1,0}X_{n-1,0}, \Lambda_{00})$ über.

Nun sei $P\,(X_{10}, X_{20}, \ldots, X_{n0})$ irgend ein Punkt außerhalb μ. Die Parallele durch P zu h trifft ε_1 in Q. Diese geht durch $\mathfrak{A}$ in N'Q' über. P' ist Schnitt von N'Q' mit der Hyperebene $X'_{n0} = -\Lambda_{n0} : X_{n0}$. Wenn wir jetzt noch berücksichtigen, daß jeder $[n-1]$-Kiste, die in $(P\varphi)$ durch die Lote von P auf die Koordinatenwände durch die Hauptachse entsteht, in eine analoge Kiste in $(P'\varphi')$ abgebildet wird, dann finden wir die kanonischen Gleichungen (II) in der inhomogenen Form durch einfache Proportionen an Parallelen.

Man sieht leicht, daß das Verhältnis eines $[n-1]$-Raumteils in der Hyperebene $X_{n0} = d$ zu seinem homologen Raumteil gleich $\prod_{\varrho=1}^{n-1} \Lambda_{\varrho 0} : d^{n-1}$ ist und bei einer (gewöhnlichen) Kollineation durch Änderung von d alle Werte annehmen kann.

45.

Soll ein Unterraum $[k]$ von R zu seinem homologen affin sein, so muß er total parallel zu μ liegen; d.h. alle seine uneigentlichen Punkte haben φ anzugehören. Demnach ist auch die Frage der Ä h n l i c h k e i t s r ä u m e genau die Frage nach allen Ähnlichkeitsräumen in allen Hyperebenen ε. Jeder lineare Raum, der das System

(61)
$$\begin{cases} \sum_{\varrho=1}^{n-1} \left(\Lambda_{\varrho o}^2 - a^2 d^2\right) X_{\varrho o}^2 = \sigma \\ X_{no} = d \end{cases}$$

identisch erfüllt, ist seinem entsprechenden ähnlich mit dem Faktor a; ebenso jeder zu ihm parallele in derselben Wand ε. Denn in (61) sind nur diejenigen Räume enthalten, die die Hauptachse treffen. Dies genügt aber für die Betrachtung der Ähnlichkeitsräume vollauf, weil Parallelverschiebung eines Raumes innerhalb derselben (affinen) Wand ε nichts an den Eigenschaften seiner Abbildung ändert. Verschieben wir einen Ähnlichkeitsraum parallel mit sich längs der Hauptachse, so bleibt er ein solcher; nur der Ähnlichkeitsfaktor variiert. Im allgemeinen Fall verschiedener Nebenkomponenten ist der höchste Ähnlichkeitsraum in einer Wand ε von der Dimension (Nr.39): $\frac{n}{2}$ bzw. $\frac{n-1}{2}$, wenn n gerade bzw. ungerade ist. Im ersten Fall liegt spezielle Lage vor.

Soll nun eine [k]-Kugel in R, deren Trägerraum nicht parallel zu μ ist, einer [k] - K u g e l von R' h o m o l o g sein, dann müssen alle ihre [k-1]-Kugel-Schnitte mit den Wänden ε affinhomologe sein, d.h. in Ähnlichkeitsräumen liegen. Die eben angegebene obere Grenze für die Dimension der Ähnlichkeitsräume im allgemeinen Fall liefert demnach die obere Grenze für die Dimension k:

> Die [k]-Sphären von R, denen wieder [k]-Sphären entsprechen, sind die Kugelschnitte aller den Sphären von R' homologen Hyperellipsoide. Im Fall verschiedener Nebenkomponenten ist k höchstens $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ bzw. $\frac{n+1}{2}$, wenn n gerade bzw. ungerade ist.

Wenn eine [n] - Sphäre einer [n]-Sphäre homolog ist, müssen nach diesem Gedankengang die Wände ε Ähnlichkeitsräume sein; d.h. alle $\Lambda_{\varrho o}$ ($\varrho = 1,2,\ldots,n-1$) müssen gleich sein. Eine solche Kollineation erhält man z.B. aus dem Fugator durch zentrische Ähnlichkeitstransformation aus der Hauptachse ($\Lambda_{\varrho o}$) und Dehnung ($-\Lambda_{no}$) parallel zu dieser. Jede so entstandene Kollineation besitzt aber tatsächlich homologe [n]-Sphären. Um diese zu finden, brauchen wir offenbar nur die Kreise in einer Ebene durch die Hauptachse zu bestimmen, die durch die induzierte nichtaffine Kollineation dieser Ebene wieder in Kreise übergehen. Da es stets Büschel[46] solcher Kreise gibt, ist die genannte notwendige Bedingung auch hinreichend für die Existenz homologer [n]-Sphären.

---

46) Vgl. T h. R e y e , R II 4), S.255.

46.

Um die Frage der K o n g r u e n z u n t e r r ä u m e zu studieren, setzen wir in (61) den Ähnlichkeitsfaktor $a=1$. Dann gilt: Jeder lineare Raum, der das System

$$\text{(61a)} \qquad \begin{cases} \sum_{\varrho=1}^{n-1} \left(\Lambda_{\varrho 0}^2 - d^2 \right) X_{\varrho 0}^2 = 0 \\ X_{n0} = d \end{cases}$$

identisch erfüllt, ist seinem Bilde kongruent; ebenso jeder zu ihm parallele in derselben Wand $\varepsilon\,(X_{n0} = d)$. Offenbar entsteht aus jedem Kongruenzraum durch Verschiebung parallel zur Hauptachse ein Büschel von Ähnlichkeitsräumen, in dem genau zwei Kongruenzräume, symmetrisch zur Fluchtwand, enthalten sind.

Während es in jeder Höhe d über der Fluchtwand Ähnlichkeitsräume bis zu der in Nr.45 angegebenen Dimension gibt, ist dies für die Kongruenzräume nicht der Fall. Um diese Erscheinung genauer zu betrachten, denken wir uns wieder - ähnlich wie bei den Affinitäten - die (positiven) Nebenkomponenten $\Lambda_{\varrho 0}$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, n-1$) geordnet numeriert, vom größten zum kleinsten. Ist nun d positiv und größer als Λ_{10}, so enthält (61a) keine Kongruenzgeraden. Innerhalb dieser Wände fern der Fluchtwand wird eben jede Strecke bei der Abbildung verkürzt. Nimmt d stetig ab, so steigt nach dem Theorem von Segre (Nr.41) die Dimension möglicher Kongruenzräume jedesmal um 1, wenn d einen Wert $\Lambda_{\varrho 0}$ annimmt. Dies ist auch anschaulich klar, weil nach der kanonischen Darstellung (II), Seite 16, z.B. für $X_{n0} = \Lambda_{10}$ gerade die erste Nebenachse als Kongruenzachse in Erscheinung tritt. Die Steigerung geht aber nur solange, bis die mittlerste Nebenkomponente $\Lambda_{\frac{n}{2}}$, bzw. bei ungeradem n das Intervall $(\Lambda_{\frac{n-1}{2},0} \cdots \Lambda_{\frac{n+1}{2},0})$ erreicht ist. Dann nimmt die Dimension wieder ab, um schließlich im Intervall zwischen $\Lambda_{n-1,0}$ und der Fluchtwand zu verschwinden. Jenseits der Fluchtwand liegt dasselbe Verhalten vor. Überhaupt sind nach (61a) alle zu einem Kongruenzraum bezüglich der Wände des Hauptachsensystems symmetrischen Räume ebenfalls Kongruenzräume.

Ist durch gegebene Werte $\bar{X}_{\varrho 0}$ eine Parallele zur Hauptachse festgelegt, so bestimmt sich die Kongruenzgerade, welche sowohl die Hauptachse als auch diese Parallele trifft, nach (61a) durch

$$\text{(62)} \qquad \begin{cases} X_{\varrho 0} = \alpha \bar{X}_{\varrho 0} & (\varrho = 1, 2, \cdots, n-1) \\ X_{n0} = d = \pm \sqrt{\dfrac{\sum_{\varrho=1}^{n-1} \Lambda_{\varrho 0}^2 \bar{X}_{\varrho 0}^2}{\sum_{\varrho=1}^{n-1} \bar{X}_{\varrho 0}^2}} \end{cases},$$

wo α Parameter auf der Geraden ist[47]. Kongruenzgeraden von der durch die Werte $\bar{X}_{i0}$ definierten Richtung $\eta_i = \bar{X}_{i0} : \sum_{i=1}^{n+1} \bar{X}_{i0}$; $\eta_n = \sigma$ gibt es demnach nur in der durch (62) angegebenen Höhe d über der Fluchtwand. Daraus folgt allgemein, daß

> die Kongruenzunterräume aller Räume [m], die denselben Schnitt mit φ haben, in denselben zwei zur Fluchtwand parallelen und symmetrischen Wänden liegen.

Dasselbe sieht man auch leicht geometrisch. Dazu betrachten wir erstens alle beliebigen parallelen [m] in R. Ist ein Unterraum eines solchen Kongruenzraum, dann ist auch der in gleicher Höhe X_{n0} liegende parallele Unterraum eines andern von ihnen Kongruenzraum, und umgekehrt; denn Parallelen in dieser Höhe entsprechen Parallelen. Zweitens nehmen wir lauter Räume mit demselben Fluchtwandschnitt. Bilden wir diese nach R' ab, so gilt für sie dort das unter 1.) Gesagte, weil sie parallel sind. Die Kombination beider Schlüsse gibt die Behauptung.

47.

Gesucht sind bei gegebenem beliebigen Punkt P außerhalb μ und $\bar{v}$ n normale Strahlen aus P, die in n normale aus P' abgebildet werden, also die Hauptachsen der kollinearen Bünde P und P', kurz: die "A c h s e n f ü r P". Projizieren wir von P aus das Polarsystem $\mathfrak{M}$ ins Unendliche nach $\bar{v}$, so entsteht dort ein neues (einfach-degeneriertes) Polarsystem $\mathfrak{M}_1$. Der Schein des gemeinsamen Polarsimplex von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}$ aus P enthält als Kanten die gesuchten Achsen für P. Jeder Punkt P des Raumes ist "Fußpunkt" für n Achsen.

Jede dieser Achsen ist zur Hyperebene der übrigen (n-1) Achsen normal und konjugiert. Für eine beliebige (von μ und $\bar{v}$ verschiedene) Hyperebene π des Raumes gibt es genau einen "konjugierten Normalstrahl". Ist π gegeben, so schneide man π mit der Fluchtwand μ und suche den durch $\mathfrak{M}$ auf ($\pi \times \mu$) bezogenen Pol in μ. Fällt man von diesem auf π das Lot p, so ist p der einzige konjugierte Normalstrahl zu π. Sein Bild p' wird zu π' normal sein. Der Lotfußpunkt $P = \pi \times p$ ist der Fußpunkt der Achse p. Nicht jede Gerade des Raumes ist Achse p, denn es gibt ja zu jeder Wand π nur einen konjugierten Normalstrahl. Die Gesamtheit aller ∞^n Achsen p von R nennen wir nach Reye[48] "Achsenkomplex". Durch jeden Punkt P gehen zwar unendlich viele Geraden des Komplexes, aber genau n Achsen, für die er Fußpunkt ist.

---

47) Die letzte Gleichung in (62) entspricht für den R_3 und $\bar{X}_{i0} = \omega i$, $\bar{X}_n = \sin i$ der Formel $D^2 = A^2 \cos^2 i + B^2 \sin^2 i$ bei H. J. S t . S m i t h, a.a.O.3), Nr.50.

48) T h. R e y e, R II 4), 28./29.Vortrag.

48.

Wenn es ein O r t h o g o n a l s y s t e m von Flächen von R geben würde, dem in R' ein Orthogonalsystem homolog wäre, dann müßten die Normalen der Flächen wieder in solche transformiert werden, d.h. jede Tangentialwand π einer solchen Fläche müßte diese gerade in ihrem Fußpunkt P berühren, und jede Normale müßte eine Achse p des Achsenkomplexes sein. Dieser Gedankengang zeigt erstens, daß das gesuchte Orthogonalsystem nicht aus Hyperebenen bestehen kann, da eine solche unendlich viele Normalen, hier aber nur eine Achse hat.

Er lehrt uns aber auch, eine Schar[49] von Hyperflächen 2.Klasse anzugeben, die ein Orthogonalsystem liefert. Eine solche Schar ist bestimmt durch zwei ihrer Flächen, die auch imaginär sein können und durch ihre Polarsysteme reell verkörpert werden (Nr.10). Daß trotzdem die durch sie definierte Schar von Polarsystemen auch reelle Inzidenzflächen enthalten muß, zeigt uns neben der noch folgenden Rechnung auch die Anschauung. Denn wenn auch der Wand π durch die beiden Polarsysteme die Pole P_1 und P_2 zugewiesen sind, die stets von π getrennt liegen, so entspricht ihr in der Schar der Polarsysteme als Polreihe die geradlinige Punktreihe P_1P_2, die einen reellen Inzidenzpunkt, den Schnittpunkt von P_1P_2 mit π, enthält. Die beiden Polarsysteme können auch in (verschiedene) Wände entartet sein, da jede Flächenschar 2.Klasse im allgemeinen sowieso (n+1) entartete Polarsysteme enthält.

Als die beiden die Schar definierenden Polarsysteme bestimmen wir nun unsere grundlegenden Polarsysteme $\mathfrak{K}$ in $\bar{\nu}$ und $\mathfrak{M}$ in μ. Wegen der ersten Forderung heiße sie "Schar konfokaler Hyperflächen 2.O.". Ihr entspricht in R' wegen der zweiten Forderung ebenfalls eine Schar konfokaler Flächen. Die Pole der Wand π erfüllen jetzt nach Nr.47 die Achse p von π. Jede Wand π wird einmal, für eine bestimmte der konfokalen Flächen, Tangentialwand für ihren Fußpunkt P als Berührungspunkt; die Achse p ist die zugehörige Normale.

Die Schar konfokaler Flächen bildet das gesuchte Orthogonalsystem, dem in R' ein Orthogonalsystem homolog ist. Durch jeden Punkt P gehen n Flächen der Schar, sie schneiden sich rechtwinklig in den Achsen für P. Der Achsenkomplex ist das System aller Geraden, die ihre Polar-[n-2] bezüglich irgend einer Scharfläche rechtwinklig kreuzen, oder das System der Normalen aller Scharflächen.

---

49) Vgl. zum Folgenden K. K o m m e r e l l, SFK 5), S.346 ff. und S.370 ff.

Die Rechnung geschieht natürlich am zweckmäßigsten in Hyperebenenkoordinaten. In solchen lauten die kanonischen Transformationsgleichungen (Nr.16)

$$(II_k) \qquad \begin{cases} \Xi_\varrho' = \frac{1}{\Lambda_\varrho}\,\Xi_\varrho & (\varrho = 1,2,\cdots,n-1) \\ \Xi_o' = \frac{1}{\Lambda_o}\,\Xi_n \\ \Xi_n' = -\frac{1}{\Lambda_n}\,\Xi_o \end{cases}$$

und die Gleichungen der Inzidenzflächen

$$(\bar{\pi}) \qquad \sum_{\varrho=1}^{n-1} \Xi_\varrho^2 + \Xi_n^2 = 0$$

und

$$(\pi) \qquad \sum_{\varrho=1}^{n-1} \frac{\Xi_\varrho^2}{\Lambda_\varrho^2} + \frac{\Xi_o^2}{\Lambda_n^2} = 0 .$$

Denn (π) entsteht, wenn man in

$$(\bar{\pi}') \qquad \sum_{\varrho=1}^{n-1} \Xi_\varrho'^2 + \Xi_n'^2 = 0$$

die Transformationsgleichungen (II_k) einführt.
Die Schar konfokaler Hyperflächen über (π) wird dargestellt durch

$$(63a) \qquad \sum_{\varrho=1}^{n-1} \Xi_\varrho^2 \left(\Theta - \frac{\Lambda_n^2}{\Lambda_\varrho^2}\right) + \Theta\,\Xi_n^2 - \Xi_o^2 = 0$$

mit dem Parameter Θ, oder jetzt in Punktkoordinaten und inhomogen durch

$$(63b) \qquad \sum_{\varrho=1}^{n-1} \frac{X_{\varrho o}^2}{\Theta - \frac{\Lambda_{no}^2}{\Lambda_{\varrho o}^2}} + \frac{X_{no}^2}{\Theta} - 1 = 0 .$$

Ihr entspricht in R' die Schar konfokaler Flächen

$$(64a) \qquad \sum_{\varrho=1}^{n-1} \frac{X_{\varrho o}'^2}{-\Lambda_{\varrho o}^2 + \frac{\Lambda_{no}^2}{\Theta}} + \frac{X_{no}'^2}{\frac{\Lambda_{no}^2}{\Theta}} - 1 = 0 .$$

Diese Gleichung wird durch die Substitution

$$(65) \qquad \frac{\Lambda_{no}^2}{\Theta} = \Theta'$$

in eine (63b) entsprechendere Form gebracht:

$$(64b) \qquad \sum_{\varrho=1}^{n-1} \frac{X_{\varrho o}'^2}{\Theta' - \Lambda_{\varrho o}^2} + \frac{X_{no}'^2}{\Theta'} - 1 = 0 .$$

Wir brauchen daher nur das k o n f o k a l e S y s t e m (63b) in R näher zu betrachten. Für negatives Θ sind die Flächen imaginär, da alle Glieder negatives Vorzeichen haben. Diesen Fall, der für unsere reelle Betrachtungsweise nichts beiträgt, schließen

wir aus. Die imaginäre Inzidenzfläche von ($\mathfrak{M}$) in der Fluchtwand entsteht für $\Theta = 0$. Liegt Θ im ersten Intervall ($\sigma \dots \frac{\Lambda_{20}^2}{\Lambda_{10}^2}$), so besitzen die zugehörigen Flächen reelle Punkte im Endlichen wie im Unendlichen, aber keine reellen Geraden (wie die zweimantligen Hyperboloide des R_3). Allgemein kann man nach dem Theorem von Segre (Nr.41) aus den Vorzeichen der Glieder in (63b) für jedes der n Intervalle, die für positives Θ durch die (n-1) Teilpunkte $\frac{\Lambda_{\varrho 0}^2}{\Lambda_{\varrho 0}^2}$ ($\varrho = 1,2,\dots,n-1$) entstehen, die Dimensionen feststellen, bis zu welchen die zugehörigen konfokalen Flächen reelle lineare Unterräume einerseits überhaupt, anderseits im Unendlichen besitzen. Diese beiden Dimensionszahlen sind gleich oder um 1 verschieden und dienen zur Einteilung der Hyperflächen 2.Ordnung (Nr.41). Für jedes Θ aus dem 2.Intervall z.B. hat (63b) zwei positive Glieder und die Fläche reelle Geraden im Endlichen und (für $n>3$ auch) im Unendlichen; im zweitletzten Intervall dagegen entstehen zwei negative Glieder, von denen eins das Absolutglied ist, sodaß diese Flächen reelle Geraden im Endlichen und unendlichferne Punkte enthalten (wie die einmantligen Hyperboloide des R_3). Im n-ten Intervall ($\frac{\Lambda_{n0}^2}{\Lambda_{n-1,0}^2} \cdots \infty$) besitzen die Flächen nur Punkte im Endlichen und sind Hyperellipsoide. Man beachte noch, daß die den Paraboloiden des R_3 entsprechenden Flächen nicht durch (63b) darstellbar sind, da ihre Schnitte mit der unendlichfernen Wand ausarten. Von den reellen Hyperflächen 2.O. des R_n aber, die weder selbst ausgeartet sind noch ausgeartete Schnitte mit $\bar{\omega}$ besitzen, gibt es bezüglich des beschriebenen Einteilungsprinzips n Arten, und diese entstehen in (63b) gerade für Werte von Θ aus den n angegebenen Intervallen, weil in (63b) genau n mögliche wesentlich verschiedene Vorzeichenkombinationen auftreten.

Es würde zu weit führen, hier auch die verschiedenen Arten von "Fokal-$[n-1]$-Flächen" aufzuführen, die für in die Intervallgrenzen fallende Werte von Θ entstehen und in die Hauptebenen ausarten.

Die Hauptachsen des konfokalen Flächensystems in R sind auch die Hauptachsen der Kollineation. Dabei sind diese Flächen so in das Hauptachsensystem eingefügt, daß je der vom Mittelpunkt entfernteste Scheitel auf der n.ten Achse liegt und dann der Reihe nach die näher liegenden Scheitel auf der 1., 2., ... Nebenachse. Man betrachte dazu die Größe der Nenner in (63b). Die Anordnung in R' ist (nach (64b)) derart, daß nach der Hauptachse die (n-1)., (n-2)., ... Nebenachse folgt. Die Intervalle für Θ' in R' entstehen durch die Teilpunkte $\Lambda_{\rho 0}^2$. Bei der Zuordnung der Systeme durch (65) geht bezüglich das 1., 2., ...n.Intervall von Θ in das n., (n-1)., ..., 1.Intervall von Θ' über. Daraus folgt, daß

jeder der konfokalen Flächen in R eine bezüglich ihrer unendlichfernen reellen linearen Räume andersartige Fläche in R' zugeordnet ist, außer bei ungeradem n den Flächen des mittleren Intervalls, die noch reelle $\left[\frac{n-1}{2}\right]$, aber nur außerhalb der unendlichfernen Wand und der Fluchtwand besitzen.

49.

Noch auf einem andern Weg wollen wir uns zu den konfokalen Flächen und den letzten Gleichungen führen lassen. Wir betrachten - wenn irgend ein vorerst fest zu denkender Punkt P ($X_{\varrho_0}^P ; X_{n_0}^P$) gegeben ist - diejenige Affinität $\mathfrak{A}^P$ der Räume R und R', die mit der gegebenen Kollineation $\mathfrak{A}$ in der Zuweisung der Punkte P und P' und ihrer infinitesimalen Umgebung von der ersten Ordnung übereinstimmt. Dabei soll natürlich P als nicht in der Fluchtwand liegend vorausgesetzt werden ($X_{n_0}^P \neq \sigma$). Die Hauptachsen aus P bezüglich der N ä h e r u n g s a f f i n i t ä t $\mathfrak{A}^P$ werden die Achsen für P bezüglich der Kollineation $\mathfrak{A}$ sein.

Wir denken die gebrochenen rationalen Funktionen

$$(II) \qquad X'_{\varrho_0} = \frac{\Lambda_{\varrho_0} X_{\varrho_0}}{X_{n_0}} \quad ; \quad X'_{n_0} = -\frac{\Lambda_{n_0}}{X_{n_0}} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n-1),$$

welche die Kollineation $\mathfrak{A}$ in kanonischer Form und inhomogenen Koordinaten darstellen (Nr.16), durch Bildung der partiellen Ableitungen in Potenzreihen für die Umgebung des Punktes P entwickelt:

$$(IIa) \qquad \begin{cases} X'_{\varrho_0} = \dfrac{\Lambda_{\varrho_0} X_{\varrho_0}^P}{X_{n_0}^P} + \dfrac{\Lambda_{\varrho_0}}{X_{n_0}^P}\left(X_{\varrho_0} - X_{\varrho_0}^P\right) - \dfrac{\Lambda_{\varrho_0}}{(X_{n_0}^P)^2}\left(X_{n_0} - X_{n_0}^P\right) + \cdots \\ X'_{n_0} = -\dfrac{\Lambda_{n_0}}{X_{n_0}^P} + \dfrac{\Lambda_{n_0}}{(X_{n_0}^P)^2}\left(X_{n_0} - X_{n_0}^P\right) + \cdots \end{cases} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Berücksichtigen wir nur die angeschriebenen Glieder bis zur ersten Potenz und lassen die durch die Punkte angedeuteten Glieder höherer Potenz weg, dann stellen diese Gleichungen die Näherungsaffinität $\mathfrak{A}^P$ dar, aber nicht in kanonischer Form, weil jedes X'_{ϱ_0} auch ein Glied in X_{n_0} enthält. Deshalb schreiben wir die Variablen wieder klein und können bei den Konstanten $X_{\varrho_0}^P$, $X_{n_0}^P$ den Index P nachträglich weglassen. Auch unterschlagen wir alle Absolutglieder, die ja auf das Hauptachsensystem keinen wesentlichen Einfluß haben. Demnach müssen wir mit dem System

(66)
$$\begin{cases} x'_{\varrho 0} = \dfrac{\Lambda_{\varrho 0}}{X_{n0}} x_{\varrho 0} - \dfrac{\Lambda_{\varrho 0}}{X_{n0}^2} x_{n0} & (\varrho = 1,2,\ldots,n-1) \\ x'_{n0} = + \dfrac{\Lambda_{n0}}{X_{n0}^2} x_{n0} \end{cases}$$

weiter nach der Vorschrift verfahren, die in § 6 gegeben wurde. Mit Gl.(6) finden wir als Determinante der b_{ik} :

(67)
$$|b_{ik}| = \begin{vmatrix} \dfrac{\Lambda_{10}^2}{X_{n0}^2} & \sigma & \cdot & \cdot & \sigma & -\dfrac{\Lambda_{10}^2 X_{10}}{X_{n0}^3} \\ \sigma & \dfrac{\Lambda_{20}^2}{X_{n0}^2} & \cdot & \cdot & \sigma & -\dfrac{\Lambda_{20}^2 X_{20}}{X_{n0}^3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma & \sigma & \cdot & \cdot & \dfrac{\Lambda_{n-1,0}^2}{X_{n0}^2} & -\dfrac{\Lambda_{n-1,0}^2 X_{n-1,0}}{X_{n0}^3} \\ -\dfrac{\Lambda_{10}^2 X_{10}}{X_{n0}^3} & -\dfrac{\Lambda_{20}^2 X_{20}}{X_{n0}^3} & \cdot & \cdot & -\dfrac{\Lambda_{n-1,0}^2 X_{n-1,0}}{X_{n0}^3} & \sum_{\varrho=1}^{n-1} \dfrac{\Lambda_{\varrho 0}^2 X_{\varrho 0}^2}{X_{n0}^4} + \dfrac{\Lambda_{n0}^2}{X_{n0}^4} \end{vmatrix}$$

Schreiben wir die Hauptachsengleichung (10) mit dem Parameter $\dfrac{\Lambda_{n0}^2}{\Theta X_{n0}^2}$, also

(68)
$$D\left(\frac{\Lambda_{n0}^2}{\Theta X_{n0}^2}\right) = \sigma ,$$

so stimmt sie bis auf den im allgemeinen nicht verschwindenden Faktor

$$-\frac{\Lambda_{n0}^2}{X_{n0}^{2n+2}} \cdot \prod_{\varrho=1}^{n-1} \left(\Lambda_{\varrho 0}^2 - \frac{\Lambda_{n0}^2}{\Theta}\right)$$

genau mit der Gl. (63b) überein. Die Folgerungen daraus werden im Folgenden gezogen.

50. [50]

Durch die Rechnung der vorigen Nummer ist gezeigt, daß die Gleichung (63b), welche bei variablen Koordinaten X_{ϱ_0}, X_{n_0} das konfokale Flächensystem mit dem Parameter Θ darstellt, zugleich für jeden festen Punkt P die Hauptachsengleichung der Näherungsaffinität α^P ist. Sie ist dann eine Gleichung n.Grades in Θ, die nach (68) n reelle und positive Wurzeln Θ_k (k=1,2,...,n) besitzt. Diese liegen in den in Nr.48 angegebenen n Intervallen, in jedem eine Wurzel, weil die linke Seite von (63b) beim Durchgang von Θ durch eine Intervallgrenze jedesmal das Vorzeichen wechselt. Durch P gehen deshalb n Hyperflächen aus der Schar konfokaler Flächen, je eine von jeder der in Nr.48 aufgeführten n Arten bezüglich der Dimensionen der reellen linearen Räume, die auf ihr überhaupt und auf ihr im Unendlichen liegen. Diese n Flächen schneiden sich rechtwinklig in P, wobei die Tangenten der Schnittkurven in P die Hauptachsen der Näherungsaffinität α^P sind. Die Rechtwinkligkeit folgt analytisch leicht durch Subtraktion zweier Gleichungen (63b) mit denselben Werten X, aber verschiedenen Θ.

Ein Punkt P ist bestimmt durch n Zahlen Θ_k, die in den oben angegebenen Intervallen liegen müssen, wenn er reell sein soll. Wir nennen sie seine "elliptischen Koordinaten Θ_k". Allerdings ist er durch sie nicht eindeutig bestimmt, sondern mit ihm alle seine (2^n-1) Symmetriepunkte bezüglich der Hauptachsen der Kollineation ; in ihnen allen ist aber die Affinität α^P im wesentlichen dieselbe. Den Übergang von Cartesischen Koordinaten zu elliptischen vermittelt Gl. (63b), von elliptischen zu Cartesischen das hieraus abgeleitete System

(69)
$$\left\{\begin{array}{l} X_{\varrho_0}^2 = \dfrac{-\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\Lambda_{n_0}^2}{\Lambda_{\varrho_0}^2}-\Theta_k\right)}{\dfrac{\Lambda_{n_0}^2}{\Lambda_{\varrho_0}^2}\cdot\prod\limits_{(\sigma=1,\ \sigma\neq\varrho)}^{n-1}\left(\dfrac{\Lambda_{\sigma_0}^2}{\Lambda_{\varrho_0}^2}-\dfrac{\Lambda_{n_0}^2}{\Lambda_{\varrho_0}^2}\right)} \qquad (\varrho=1,2,\ldots,n-1) \\ X_{n_0}^2 = \dfrac{\prod\limits_{\varrho=1}^{n-1}\Lambda_{\varrho_0}^2}{\Lambda_{n_0}^{2n-2}}\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}\Theta_k \ . \end{array}\right.$$

---

50) Vgl. jetzt außer S F K 5), S.372/79 noch H.J.St. S m i t h, a.a.O.3), Nr.44-46 und R. D ü r r, a.a.O.6), S.25-27.

Führt man in R' ebenso elliptische Koordinaten Θ' aus den konfokalen Flächen (64) ein, so werden die Gleichungen der Kollineation $\mathfrak{a}$ sehr einfach und lauten:

$$\Theta_k \cdot \Theta_k' = \Lambda_{no}^2 \qquad (k = 1,2,\ldots,n). \tag{70}$$

Dieser Einfachheit wegen führen wir noch für die elliptischen Koordinaten Θ_k eine aus (63b) - und entsprechend für Θ_k' aus (64b) - folgende anschauliche geometrische Deutung an:

Die n elliptischen Koordinaten Θ_k (bzw. Θ_k') eines Punktes P (bzw. P') sind die Quadrate der zur n-ten Hauptachse gehörigen Halbmesser für die n durch P (bzw. P') gehenden Flächen der konfokalen Schar, die für R (bzw. R') das Orthogonalsystem liefert.

Die Näherungsaffinität $\mathfrak{a}^p$ für P ist gegeben durch das einer Sphäre um P mit unendlich kleinem Radius r mittels der Kollineation $\mathfrak{a}$ entsprechende Ellipsoid mit dem Mittelpunkte P' als "Indicatrix". Die Hauptachsen der Indicatrix sind die Achsen für P', die Hauptachsen der Affinität $\mathfrak{a}^p$, die Hauptachsen des dem isotropen Kegel aus P homologen Kegels und die Normalen der durch P' gehenden konfokalen Flächen.

Trägt man auf jeder Normalen p_k' von P' aus nach beiden Seiten das Stück

$$\left| r \frac{\sqrt{\Theta_k'}}{X_{no}} \right| = \left| r \frac{\sqrt{\Theta_k'}\, X_{no}'}{\Lambda_{no}} \right| = \left| r \frac{\Lambda_{no}}{\sqrt{\Theta_k'}\, X_{no}} \right|$$

als Halbmesser ab, so entsteht gerade die Indicatrix.

Durch diese Indicatrix ist die "Abbildung um P im Kleinen", genauer: die durch $\mathfrak{a}$ erzeugte Abbildung der Umgebung des Punktes P auf die Umgebung des Punktes P' in erster Näherung bestimmt. Nun können wir die im vorangegangenen Paragraphen hergeleiteten Sätze über Fokaleigenschaften affiner Räume auf die Näherungsaffinität $\mathfrak{a}^p$ mit den Tensorkomponenten Λ_{ko}^p anwenden, wobei nach Gl.(68)

$$\left(\Lambda_{no}^p\right)^2 = \frac{\Lambda_{no}^2}{\Theta_k \left(X_{no}^p\right)^2} = \frac{\Theta_k'}{\left(X_{no}^p\right)^2} \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{71}$$

gilt. Für verschiedene Nebenkomponenten Λ_{so} von $\mathfrak{a}$ sind die n Werte Θ_k in den n Intervallen verschieden und damit auch für einen festen Punkt P die n Tensorkomponenten Λ_{no}^p.

Die Sätze über Kongruenzunterräume affiner Räume (Nr.38) liefern Aussagen über die Richtungen aus P, für welche die homologen Linienelemente ds aus P und ds' aus P' gegen $\mathfrak{a}$ invariant sind.

Unter den Geraden dieser Richtungen sind aber nur diejenigen auch Kongruenzgeraden bezüglich $\mathfrak{a}$, welche parallel den Fluchtwänden laufen.

Ist eine Ähnlichkeitsebene α durch P (Nr.39) bezüglich $\mathfrak{a}^p$ gefunden, so ist sie nur dann eine solche auch bezüglich $\mathfrak{a}$, wenn sie parallel zur Fluchtwand ist (Nr.45). Aber, auch wenn dies nicht erfüllt ist, entspricht dem Strahlenbüschel aus P in α ein kongruentes aus P' in α', nicht nur bezüglich der Näherungsaffinität, sondern auch in der nichtaffinen Kollineation $\mathfrak{a}$. Umgekehrt muß jedes Strahlenbüschel kongruenter Winkel für $\mathfrak{a}$ in der Näherungsaffinität einer Ähnlichkeitsebene (Nr.17) angehören. So folgt:

Die Strahlenbüschel aus P, deren Winkel gegen $\mathfrak{a}$ invariant sind, liegen in den Ähnlichkeitsebenen der Näherungsaffinität für P.

Das über die Fokalräume Gesagte (Nr.40) gilt wörtlich, wenn wir P auf P' und die Achsen für P entsprechend auf die Achsen für P' legen und nur die mit P (P') inzidenten Räume betrachten. Aus dem letzten Satz jener Nr.40 folgt, daß bei ungeradem n ein Fokal-[f] bezüglich $\mathfrak{a}$ von der kleinstmöglichen Dimension $f = \frac{n-1}{2}$ Tangentialraum an eine (bestimmte) der konfokalen Flächen (63b) sein muß. Da der Fokal-[f] diese Bedingung nicht nur in diesem einen Punkt P, sondern in jedem seiner Punkte erfüllen muß - denn der gegen $\mathfrak{a}$ invariante Winkel zweier Hyperebenen z.B. ist bei P gemessen derselbe wie an jedem Punkt ihres Durchschnitts - , kann der Fokal-[f] die genannte konfokale Fläche nie verlassen und ist einer ihrer erzeugenden Räume (entsprechend den Erzeugenden der einmantligen Hyperboloide). Ein allgemeiner Schluß ist nicht möglich, weil im allgemeinen die Fokal-[f] schief im System der Achsen für P stehen. Der erwähnte Sonderfall ist der einzige, in dem die mögliche Dimension eines Fokal-[f] und eines reellen Unterraums einer der konfokalen Flächen übereinstimmen und spielte schon einmal (Nr.48 am Ende) eine Sonderrolle.

Wieder sind unsere Ausführungen, wie in § 8, immer mehr zu Aussagen über Hyperflächen 2.O. geworden. Eine Grenze zwischen der metrischen Theorie der Hyperflächen 2.O. und der der Kollineationen gibt es nicht. Jede durchdringt die andere wie ein Ferment. Die Formeln sind dieselben; jedoch deren Deutung liegt bald hier, bald dort der Anschauung und dem Wesen näher. Wir haben hier versucht, besonders diejenigen Eigenschaften zusammenzustellen, die bei der Kollineation selbst ein unmittelbares Interesse beanspruchen können.